# Calcul d'un axe profilé pour cadran équatorial de temps légal

*Yvon Massé*

## 1 Ephéméride du Soleil

Soit le repère équatorial suivant :

Axe des x : en direction du point vernal
Axe des y : sur l'équateur en direction de l'ascension droite 6 h
Axe des z : en direction du pôle nord
Origine : sur la terre considérée ponctuelle

Les coordonnées du Soleil dans ce repère s'écrivent :

$$\begin{aligned} xe &= \cos L \\ ye &= \sin L.\cos Ob \\ ze &= \sin L.\sin Ob \end{aligned} \qquad (1)$$

Avec L longitude du Soleil et Ob l'obliquité de l'écliptique (0,4091 rd).
En prenant comme unité de temps le jour, on peut calculer la longitude du Soleil à partir des relations suivantes :

Longitude moyenne : $Lm = K.(J - Jl)$
Anomalie moyenne : $M = K.(J - Jm)$

Avec K vitesse angulaire en radian/jour ($K = 2\pi/365{,}25 = 0{,}0172024$), Jl jour où le soleil moyen passe par le point vernal et Jm jour du périhélie.

En prenant pour origine des temps le 1$^{er}$ mars à 0 heure TU, Jl et Jm ont pour valeur :

$Jl = 21{,}44$
$Jm = 308{,}7$

On peut obtenir la valeur de J en fonction de la date Jo/Mo (jour/mois) et l'heure TU Hu par les relations :

$Mo = Mo + 12$ si $Mo < 3$
$J = Int(30{,}61.(Mo + 1)) + Jo + Hu/24 - 123$

Avec Int(x) partie entière de x. La longitude du Soleil s'obtient alors par :

$L = Lm + 2.e.\sin M + 1{,}25.e^2.\sin 2.M$

Avec e excentricité de l'orbite elliptique ($e = 0{,}0167$).

## 2 Repère cadran

Soit le repère cadran lié à la terre définit comme suit :

Axe des x : à l'intersection de l'équateur et du méridien, en direction du Soleil à midi vrai
Axe des y : horizontal en direction de l'est
Axe des z : en direction du pôle nord
Origine : au centre du cercle gradué du cadran

Soit l'heure légale Hl pour laquelle le soleil moyen se trouve à l'angle horaire a. Tous les jours à l'heure Hl on peut obtenir la position du repère cadran dans le repère équatorial par une rotation de l'angle A autour de l'axe z avec :

$A = Lm + a$

D’où les coordonnées du Soleil dans le repère cadran à l’heure Hl :

$$\begin{aligned} xc &= xe.\cos A + ye.\sin A \\ yc &= -xe.\sin A + ye.\cos A \qquad (2) \\ zc &= ze \end{aligned}$$

# 3 Génératrice de l’axe profilé

Soit E le point du cercle gradué de rayon R situé sur la partie négative de l’axe des x, ce point portera la graduation Hl.

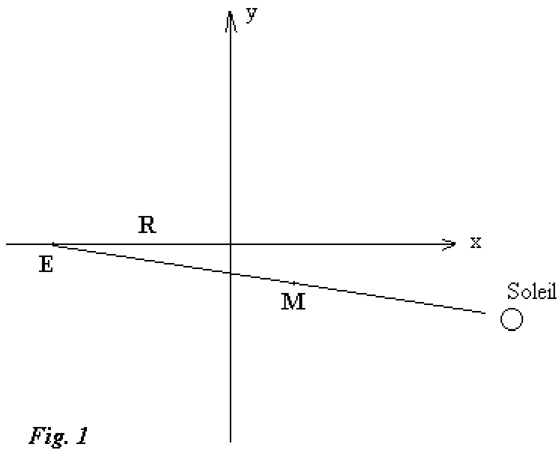



*Fig. 1*

Soit M un point quelconque situé sur le rayon du Soleil aboutissant au point E, ses coordonnées s’écrivent :

$$\begin{aligned} x &= k.xc - R \\ y &= k.yc \\ z &= k.zc \end{aligned}$$

La distance r du point M à l’axe des z s’écrit :

$$r^2 = x^2 + y^2 = (k.xc - R)^2 + (k.yc)^2$$

$$r^2 = (z\frac{xc}{zc} - R)^2 + (z\frac{yc}{zc})^2 \qquad (3)$$

Pour une date donnée, la génératrice du volume de révolution engendrée par le rayon du Soleil aboutissant au point E est une hyperbole. Il faut trouver la génératrice enveloppe de l’ensemble des hyperboles pour toutes les dates de l’année.

La relation (3) est de la forme f(r,z,J) = 0, l’enveloppe s’obtient par l’équation :

$$\frac{\partial f}{\partial J} = 0$$

En notant la dérivée d’une fonction quelconque g(J) par rapport à J par g’, l’équation s’écrit :

$$f' = 2.(z\frac{xc}{zc} - R)'.(z\frac{xc}{zc} - R) + 2.(z\frac{yc}{zc})'.(z\frac{yc}{zc}) = 0$$

$$\frac{z.(xc'.zc - xc.zc').(z.xc - R.zc)}{zc^3} + \frac{z.(yc'.zc - yc.zc').z.yc}{zc^3} = 0$$

$$z.xc.(xc'.zc - xc.zc') - R.zc.(xc'.zc - xc.zc') + z.yc.(yc'.zc - yc.zc') = 0$$

$$z = \frac{R.zc.(xc'.zc - xc.zc')}{xc.(xc'.zc - xc.zc') + yc.(yc'.zc - yc.zc')}$$

$$z = \frac{R.zc.T}{xc.T + yc.U}$$

(2) <=> $xc' = xe'.\cos A - xe.A'.\sin A + ye'.\sin A + ye.A'.\cos A$

$xc' = A'.yc + xe'.\cos A + ye'.\sin A$ (4)

(2) <=> $yc' = - xe'.\sin A - xe.A'.\cos A + ye'.\cos A - ye.A'.\sin A$

$yc' = - A'.xc - xe'.\sin A + ye'.\cos A$ (5)

(4) <=> $T = A'.yc.zc + xe'.\cos A.zc + ye'.\sin A.zc - xe.\cos A.zc' - ye.\sin A.zc'$

$T = A'.yc.zc + \cos A.(xe'.zc - xe.zc') + \sin A.(ye'.zc - ye.zc')$

$T = A'.yc.zc + \cos A.V + \sin A.W$

$V = - L'.\sin^2 L.\sin Ob - L'.\cos^2 L.\sin Ob$

$V = - L'.\sin Ob$ (6)

$W = L'.\cos L.\cos Ob.\sin L.\sin Ob - \sin L.\cos Ob.L'.\cos L.\sin Ob$

$W = 0$ (7)

(6)(7) <=> $T = A'.yc.zc - \cos A.L'.\sin Ob$ (8)

(5) <=> $U = - A'.xc.zc - xe'.\sin A.zc + ye'.\cos A.zc + xe.\sin A.zc' - ye.\cos A.zc'$

$U = - A'.xc.zc - \sin A.(xe'zc - xe.zc') + \cos A.(ye'.zc - ye.zc')$

$U = - A'.xc.zc - \sin A.V + \cos A.W$

(6)(7) <=> $U = - A'.xc.zc + \sin A.L'.\sin Ob$ (9)

(8)(9) <=> $$z = \frac{R.zc.(A'.yc.zc - \cos A.L'.\sin Ob)}{xc.(A'.yc.zc - \cos A.L'.\sin Ob) + yc.(- A'.xc.zc + \sin A.L'.\sin Ob)}$$

$$z = \frac{R.zc.(A'.yc.\sin L.\sin Ob - \cos A.L'.\sin Ob)}{xc.A'.yc.zc - yc.A'.xc.zc - L'.\sin Ob.(xc.\cos A - yc.\sin A)}$$

(2) <=> $$z = \frac{R.zc.\sin Ob.(A'.yc.\sin L - \cos A.L')}{- L'.\sin Ob.xe}$$

$$(1) \iff z = \frac{R.zc.(A'.yc.\sin L - \cos A.L')}{- L'.\cos L}$$

Notons que A' = K et L' = K.(1 + 2.e.cos M + 2,5.e².sin 2.M) et posons :

$$N = \frac{L'}{A'}$$

$$N = 1 + 2.e.\cos M + 2{,}5.e^2.\sin 2.M$$

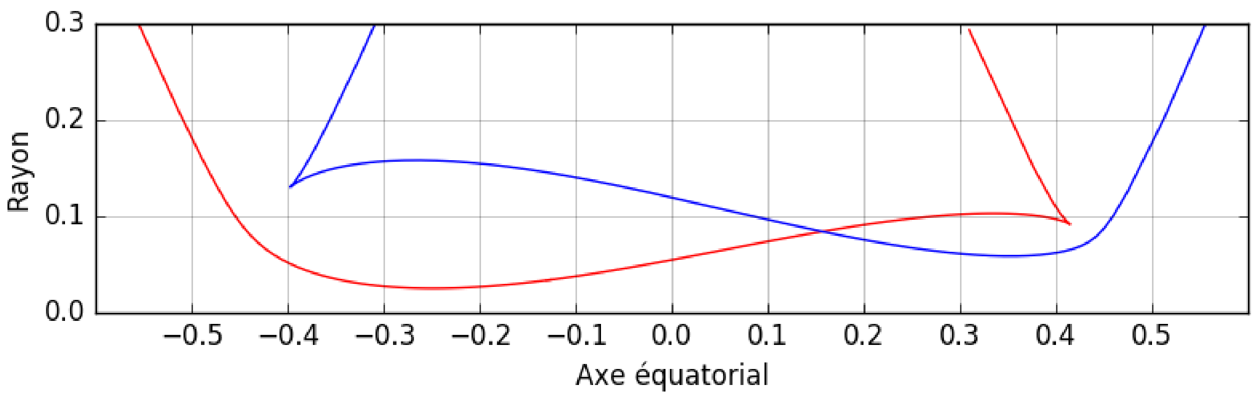
d'où enfin :

$$z = \frac{R.zc.(N.\cos A - yc.\sin L)}{N.\cos L}$$

r s'obtient alors par la relation (3)

# 4 Application numérique

La courbe obtenue avec les valeurs du §1, R = 1 et a = 5° est la suivante :




Une animation sur la génération de cette courbe par l'hyperbole de la relation (3) est disponible ici : https://gnomonique.fr/divers/anim_style_profile.gif

La courbe comporte 4 branches assymptotiques à proximité des solstices. Les 2 branches qui font suite aux points de rebroussements ne sont pas fonctionnelles et ne peuvent pas être conservées, elles porteraient ombre sur le cadran. Elles correspondent à des périodes où le principe du cadran ne peut pas être rigoureux. En pratique, l'erreur correspondante est relativement faible. De toutes façons, aux périodes des solstices la précision de lecture est par ailleurs assez mauvaise.

# 5 Bibliographie


- Pierre Bacchus : Cadran solaire de temps moyen. Observation & Travaux n° 16. 1988.
  https://adsabs.harvard.edu/full/1988O%26T....16...17B
- Frank W. Cousins : Sundial – The Art and Science of Gnomonics. 1970
  http://sunquestsundial.org/wp-content/uploads/2015/10/Cousins-1970.pdf