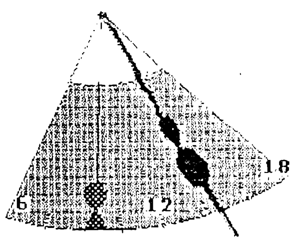
CADRAN SOLAIRE DE TEMPS MOYEN A STYLE PROFILÉ

1. INTRODUCTION

On peut voir en plusieurs endroits de la Côte d'Azur des cadrans solaires constitués par un tronc de cône en tôle, dont l'axe, matérialisé par une tige de fer, est le style. Ces cadrans admettent la symétrie de révolution, et leurs graduations sont équidistantes. Sous cette forme ils indiquent le temps vrai de Greenwich, car le calage de la graduation tient compte de la longitude du lieu. Ils sont dus à Augustin NÉMETH, Ingénieur informaticien à La Gaude, qui les a décrits en 1981 dans le n° 32 des "Nouvelles IBM".

Leur particularité la plus remarquable est de présenter un renflement du style, visiblement destiné à faire indiquer par ce cadran le temps solaire moyen. En effet, si l'ombre d'un style filiforme indique le temps vrai, l'ombre du renflement indique par son bord gauche ou droit (selon le signe de l'équation du temps) une heure décalée. Ce décalage conserve la même valeur à toute heure du jour par suite de la symétrie de révolution du système, à condition que le renflement soit lui-même de révolution. Selon la date de l'année, donc selon la déclinaison du Soleil, l'ombre du renflement se forme plus ou moins haut sur le cadran. Sa section par un cercle portant la graduation varie avec la date. On conçoit qu'avec un renflement de forme convenable, le décalage soit toujours égal à l'équation du temps, et que le cadran puisse indiquer le temps moyen.

Ces cadrans appartiennent à la même famille que celui du Major-Général OLIVER (1892), et que le cadran "à cylindre" de l'ingénieur allemand BERNHARDT, à Bietigheim.



A deux dates pour lesquelles la déclinaison du Soleil a même valeur (par exemple 1er juin et 12 juillet), l'équation du temps a en général des valeurs de signes contraires, et ce sont les deux bords de l'ombre du renflement qui doivent intervenir. Comme de plus ces deux équations du temps n'ont pas, en général, même valeur absolue, les parties gauche et droite du renflement ne sont pas pareilles; le renflement est, non pas vraiment de révolution, mais formé de deux moitiés, la gauche et la droite, qui sont chacune des demi-surfaces de révolution.

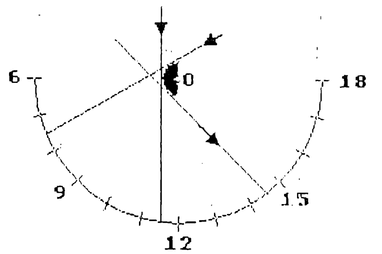
On sait que l'équation du temps s'annule 4 fois par an, et passe par 4 extremums, assez grands en valeur absolue en automne et en hiver, plus petits au printemps et en été. On doit s'attendre à un double renflement du style : l'un plus gros et plus bas sur le style, l'autre plus petit et plus haut. Entre eux le style doit être plus ou moins filiforme. Curieusement les cadrans de la Côte d'Azur ne présentent que le premier de ces deux renflements (celui d'hiver).

2. PROBLÈMES

Un problème se pose : quelle doit être la forme exacte de la double demi-surface de révolution constituant le renflement ?

Un autre problème est envisageable : ce procédé d'indication du temps moyen peut-il être étendu à un cadran non de révolution, tel qu'un cadran mural ?

3. SOLUTION APPROCHÉE DU PROBLÈME DE RÉVOLUTION



Pour alléger l'exposé, limitons-nous provisoirement à une seule moitié d'un seul renflement, par exemple celle qui va du 31 août (E = 0) au 21 décembre (solstice d'hiver, E = -1,5 min). Le cercle gradué, que l'on prendra de rayon 1, a pour centre un certain point O du style. Il est dans un plan équatorial. Le 23 septembre, jour de l'équinoxe, les rayons solaires sont parallèles à ce plan. L'équation du temps à cette date étant -7,3 min ou -0,032 rad, il suffit d'enfiler sur le style un disque opaque de centre O, de rayon 0,032, pour obtenir le temps moyen par le bord gauche de son ombre. Seul le demi-disque gauche (Ouest) est utile.

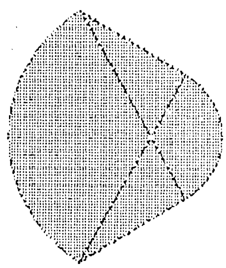
A une autre date, par exemple le 31 octobre, l'équation du temps est -16 min (c'est un extremum), ou -0,070 rad. Un disque de rayon 0,070 donnera encore le temps moyen. La déclinaison du Soleil étant $\delta = -14°$, il convient de mettre le centre de ce disque en un point O', à la distance OO' = tg δ = -0,25 de O (et en-dessous).

En empilant les disques correspondant à chaque date on obtient un solide continu, satisfaisant plus ou moins au but poursuivi. La surface de ce solide est assimilable à celle qu'engendrerait la courbe "en huit" du temps moyen si on la fait tourner (d'un demi-tour) autour de sa droite moyenne.

La solution n'est pas rigoureuse car les différents disques, au lieu de porter ombre directement sur le cadran, portent en partie ombre les uns sur les autres.

4. RACCORDEMENT DES DEMI-DISQUES

Pour une déclinaison du Soleil donnant, aux deux dates de l'année où le Soleil passe par cette déclinaison, des équations du temps de signes contraires mais de valeurs absolues différentes, on obtient deux demi-disques de rayons différents. Il est visible que, aux environs de l'angle horaire 6h (ou 18h), le grand demi-disque fonctionne correctement, mais non le petit (il est "à l'ombre" du grand).



Plutôt que des demi-disques, il convient de prendre des secteurs de disques plus petits, limités par deux droites tangentes au petit disque, et sécantes au grand disque, délimitant sur chacun d'eux des secteurs d'égale amplitude. On obtient ainsi un fonctionnement correct, sur le plus grand intervalle possible en angle horaire dans les deux cas. Par exemple cet intervalle est de 8 heures si les rayons des disques sont dans le rapport 2.

5. RECENTRAGE DU HUIT

Il existe une déclinaison du Soleil (δ = 8°,97) pour laquelle l'équation du temps a même valeur (39 s) aux deux dates où cette déclinaison est atteinte. Il y correspond un point double de la courbe en huit de l'équation du temps. Pour une déclinaison voisine de celle-là les deux équations du temps sont de même signe, les deux demi-disques se trouvent d'un même côté, et un seul des deux peut être conservé. Le système d'indication du temps moyen ne fonctionne pas, pendant certains intervalles de temps.

Il est préférable de décaler la graduation du cadran de 39 s, de manière à diminuer toutes les équations du temps de cette quantité, et à ramener le point double sur l'axe. Les équations du temps ainsi modifiées sont alors de signes contraires dans toute cette région, et il n'y a plus d'intervalle de non-fonctionnement.

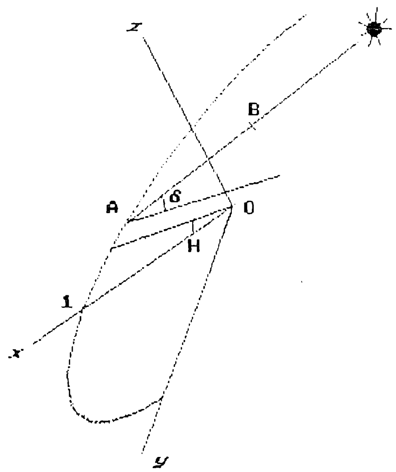
On trouve aussi des déclinaisons (voisines des solstices) où les deux équations du temps ont même signe, mais il n'est plus possible de leur appliquer le même artifice.

6. SOLUTION EXACTE DU PROBLÈME DE RÉVOLUTION

Soit une date pour laquelle la déclinaison du Soleil a une valeur δ, et l'équation du temps (corrigée de 39 s) une valeur E. A l'instant où l'angle horaire du Soleil est H, un rayon solaire, qu'on appelera *rayon utile*, coupe le cercle gradué du cadran en un point correspondant à l'angle horaire H+E après avoir touché le solide cherché en un certain point.

Rappelons que le point du cercle gradué situé à l'angle horaire H porte la graduation H, augmentée de la longitude du lieu (comptée positivement vers l'Est), augmentée de 1 h ou 2 h si l'on veut faire indiquer l'heure d'hiver ou l'heure d'été, augmentée du décalage de 39 s.

Les rayons utiles sont connus, par leur direction (angle horaire et déclinaison du Soleil), et par un point A (intersection avec le cercle gradué). Ils constituent une congruence, ou famille de droites à 2 paramètres (H et δ). Il suffit de trouver la surface enveloppe de cette famille de droites. Ce problème est du même type que la détermination de la caustique d'un système optique. On trouvera, comme pour les caustiques, une surface enveloppe à 2 nappes. Ici l'une des nappe est dégénérée en le cercle gradué lui-même, sur lequel s'appuient toutes les droites ; l'autre nappe est la surface cherchée. On sait que cette surface est de révolution, et qu'il suffit donc d'en déterminer une section méridienne. On peut s'attendre, comme souvent dans les caustiques, à y trouver une arête de rebroussement.



Soit un repère orthonormé O*xyz*, où O est le centre du cercle gradué, supposé de rayon 1. O*z* est le style, dirigé vers le pôle céleste Nord. O*xz* est le plan méridien, avec O*x* vers le Nord. O*y* est horizontal vers l'Ouest. Les équations du rayon utile de paramètres H et δ sont

$$y + \sin(H+E) + [x - \cos(H+E)] \operatorname{tg} H = 0$$

$$z = -[x - \cos(H+E)] \operatorname{tg} \delta / \cos H$$

Ce rayon coupe un plan parallèle à O*xy*, de cote z, au point B de coordonnées

$$x = \cos(H+E) - z \operatorname{cotg} \delta \cos H$$
$$y = -\sin(H+E) + z \operatorname{cotg} \delta \sin H$$

Faisons varier H, à δ constant. Ce point décrit un cercle d'axe O*z*, de rayon r tel que

$$r^2 = 1 + z^2 \operatorname{cotg}^2 \delta - 2z \operatorname{cotg} \delta \cos E$$

Faisons varier δ ; ce rayon passe par un minimum lorsque la dérivée de r^2 s'annule. En adoptant tg δ comme paramètre, plutôt que δ, cette condition s'écrit

$$z - \cos E \operatorname{tg} \delta - E' \sin E \operatorname{tg}^2 \delta = 0$$

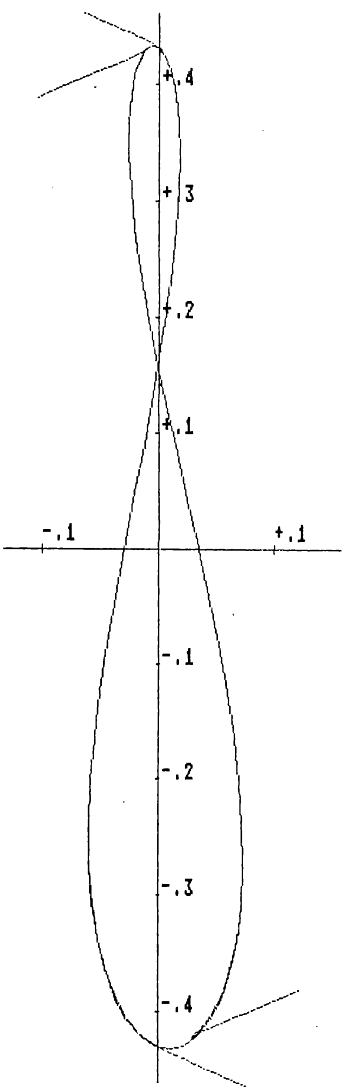
où E' est la dérivée de E par rapport à tg δ. Le rayon minimal est donné par

$$r^2 = (1 + E'^2 \operatorname{tg}^2 \delta) \sin^2 E$$

Les cercles minimaux, pour les différents plans de cote z, engendrent une surface de révolution à l'intérieur de laquelle aucun rayon utile ne pénètre; c'est la surface tangente à ces rayons.

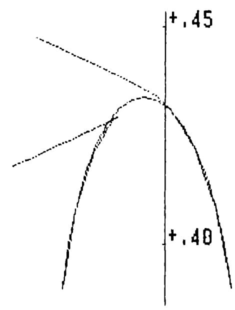
Pour chaque date de l'année on a des valeurs de δ, tg δ, E, E'. On en tire r et z, ce qui donne la méridienne de la surface de révolution, sous forme paramétrique.

Sur la surface de révolution elle-même les lignes formées par les ensembles de points (de contact de rayon utile) correspondant à une même date sont les cercles d'axe Oz (ou plutôt des arcs de cercle, voir § 4). Les lignes H = constante s'obtiennent à partir des expression de x et de y, ou de leur rapport :



$$\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{tg}\, H + E'\mathrm{tg}\, \delta}{1 - E'\mathrm{tg}\, H\, \mathrm{tg}\, \delta}$$

$$= \mathrm{tg}\, [H + \mathrm{arctg}\, (E'\mathrm{tg}\, \delta)]$$



La méridienne a une branche infinie pour les solstices, car E' est alors infini. Elle a un point de rebroussement si $dz/d(\mathrm{tg}\, \delta) = 0$, d'où

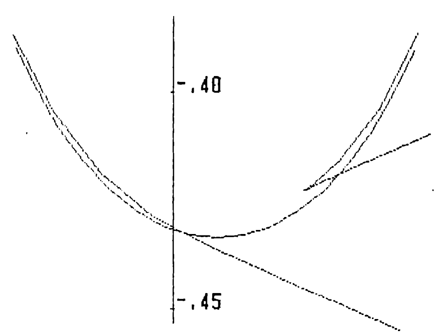
$$\cos E\, (1 + E'^2 \mathrm{tg}^2 \delta) + \sin E\, \mathrm{tg}\, \delta\, (E' + E''\, \mathrm{tg}\, \delta) = 0$$

7. RÉSULTAT

La figure ci-contre représente une méridienne du solide de révolution, tant pour la solution approchée que pour la solution exacte. Ces deux solutions diffèrent fort peu, sauf près des solstices.

On a un point de rebroussement de coordonnées z = 0,4290, r = -0,0137, pour la déclinaison $\delta = 23{,}^{\circ}382$. La longitude du Soleil est $93{,}^{\circ}901$, ce qui arrive le 25 juin. Un autre point de rebroussement est en z = -0,4226, r = 0,0273, pour $\delta = -23{,}^{\circ}343$. La longitude de $-95{,}^{\circ}068$ se présente le 16 décembre.

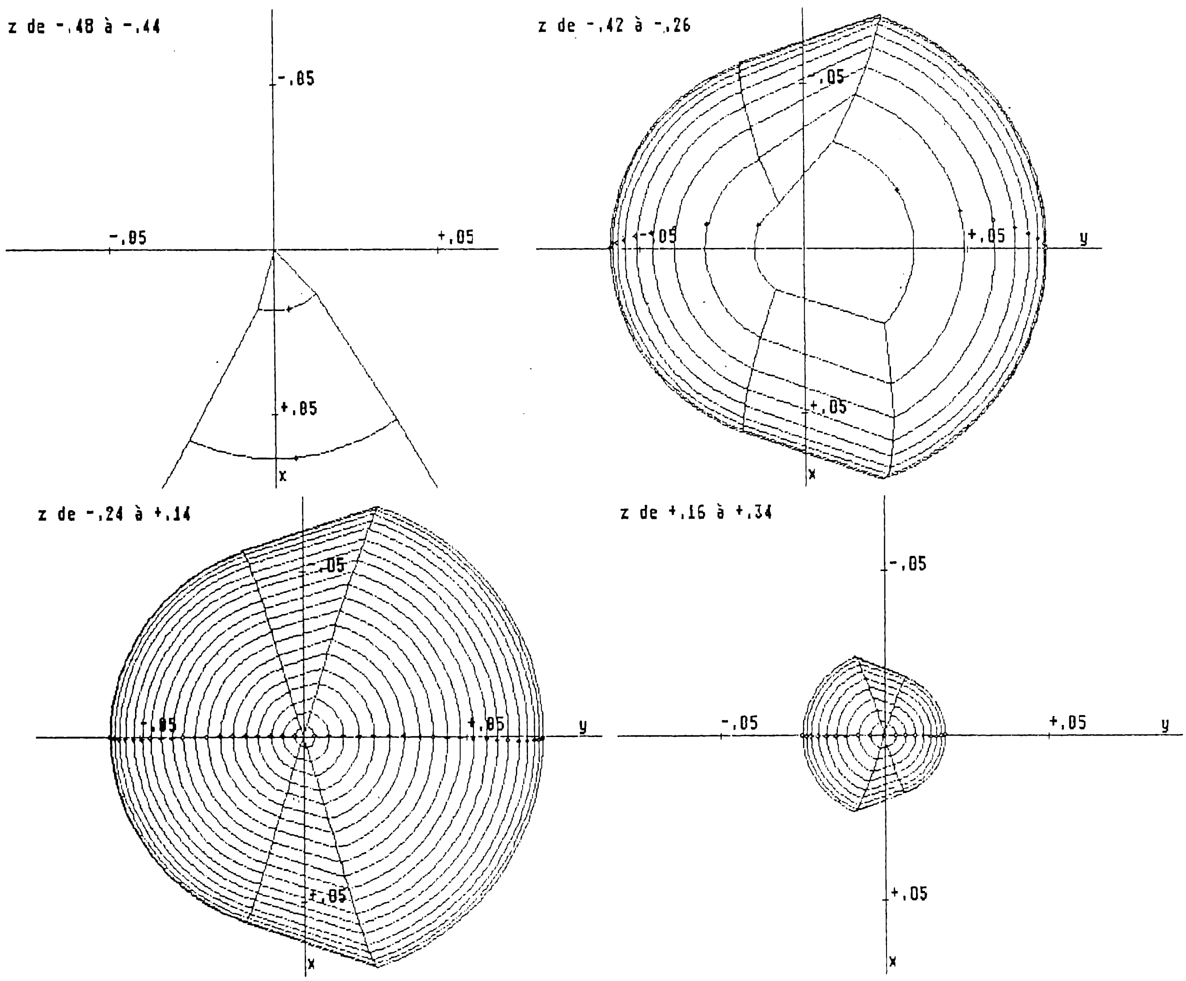
Les branches infinies partant de chacun des points de rebroussement ne peuvent être conservées : elles porteraient ombre sur tout le reste du système. Le cadran ne peut pas fonctionner entre le 21 et le 25 juin, ni entre le 16 et le 21 décembre. On sait d'ailleurs que de toutes façons, au voisinage des solstices où E' est infini, la précision de lecture du temps moyen se dégrade complètement.

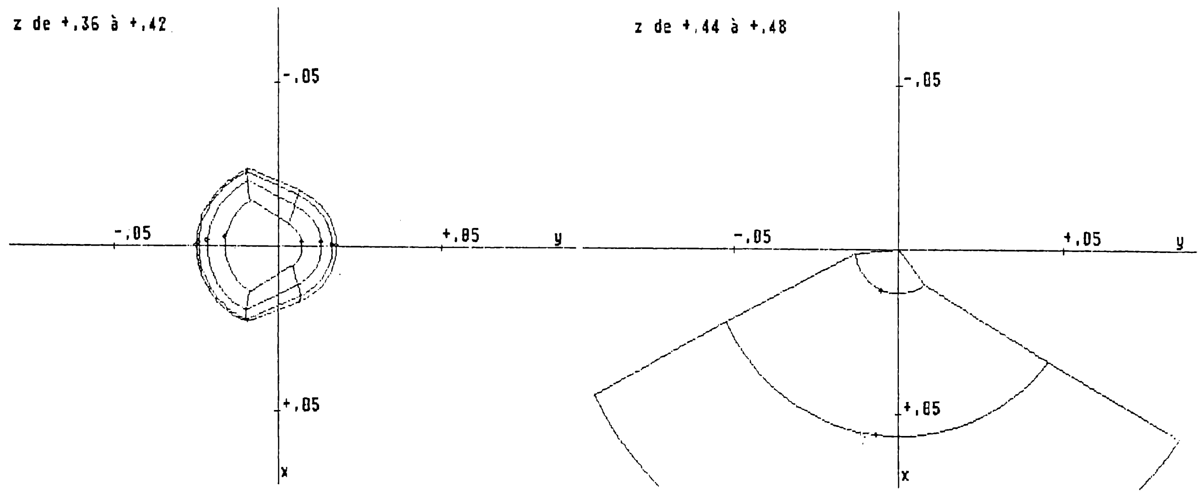


Le raccordement des demi-disques (§ 4) se présente de façon moins simple que dans la solution approchée car le rayon utile passant par un point B d'un cercle z = Constante, s'il est tangent en ce point à la surface de révolution, n'est généralement pas tangent au cercle. Il fait avec lui un angle θ, tel que $\mathrm{tg}\ \theta = E'\mathrm{tg}\ \delta$, égal à l'angle polaire du point midi (H = 0) sur ce cercle (voir § 6). Une section z = Cte est donc formée de deux arcs de cercle raccordés par deux segments qui ne leur sont pas tangents.

Ce raccordement sera déterminé par les deux contraintes suivantes :
1.- Maximiser la somme des deux arcs;
2.- Les centrer au mieux sur leurs points midi. On trouve que cet optimum conduit à centrer le plus grand des deux arcs sur son point midi.

Les sections ainsi déterminées sont représentées ci-dessous, pour des z progressant par pas de 0,02. Au-delà des arêtes de rebroussement il ne subsiste qu'un seul arc, donnant à la surface une forme de corolle. On lui a donné une amplitude de 60° en hiver, 120° en été, en vue d'un fonctionnement sous nos latitudes; à ce détail près, la surface obtenue est indépendante de la latitude.





8. PROBLEMES NON DE REVOLUTION

Soit un cadran plan, sur lequel on a tracé et gradué une droite. Un style filiforme indique le temps vrai (de Greenwich, si l'on a tenu compte de la longitude du lieu). Un style profilé peut indiquer le temps moyen, si l'on donne au renflement la forme voulue. Ici encore ce renflement est l'enveloppe de la famille à 2 paramètres des rayons solaires utiles; mais il n'a plus de raison d'être de révolution, et l'on devra le définir par toute une série de sections.

Pour des raisons architecturales on peut désirer que la droite graduée ne soit pas dans un plan équatorial, et que ce soit par exemple une horizontale sur un cadran déclinant. On peut même prendre une ligne graduée qui ne soit pas une droite. Le principe du calcul reste le même. Précisons la méthode de calcul, en se limitant à une graduation rectiligne.

Soit un repère orthonormé $Oxyz$, où Oz est le style (axe du Monde), et xOz le plan méridien, avec Ox coupant la droite graduée au point $x=1$. Les équations de cette droite sont

$$x = py + 1 \qquad\qquad z = qy$$

On a notamment p = q = 0 pour une droite horizontale Est-Ouest.

L'angle horaire H d'un point de cette droite est donné par tg H = $-y/x$, ce qui permet d'y tracer la graduation de temps vrai (local ou de Greenwich), augmenté de 39 s. A une certaine date, pour laquelle la déclinaison du Soleil est δ et l'équation du temps est E, et à une certaine heure pour laquelle l'angle horaire du Soleil est H, le rayon solaire utile (indiquant le temps moyen) passe par le point correspondant à l'angle horaire H+E. Les coordonnées de ce point sont

$$x_o = \frac{\cos(H+E)}{D} \qquad y_o = -\frac{\sin(H+E)}{D} \qquad z_o = -\frac{q\ \sin(H+E)}{D}$$

avec

$$D = \cos(H+E) + p\ \sin(H+E)$$

Les cosinus directeurs du rayon solaire utile étant cos δ cos H, −cos δ sin H, sin δ, les équations de ce rayon solaire sont

$$-\frac{x - x_o}{\cos\delta\ \cos H} = \frac{y - y_o}{\cos\delta\ \sin H} = \frac{z - z_o}{\sin\delta}$$

Telles sont les équations de la famille de droites dont il faut chercher la surface enveloppe. Elles dépendent du paramètre H, et du paramètre δ, ou t = tg δ (directement, et par l'intermédiaire de x_0 y_0 z_0 E).

La section d'une droite de la famille par un plan z = constante est un point dont les coordonnées x, y sont des fonctions de z, H, t. Pour une certaine valeur de t ce point engendre une courbe paramétrée par H. Par variation de t on obtient une famille de courbes, dont l'enveloppe est la section, par le plan de cote z, de la surface cherchée.

Les courbes correspondant à t et à $t+dt$ se coupent en un point, de paramètres H et t sur la première, H+dH et $t+dt$ sur la seconde, tels que

$$x(z,\ \mathrm{H},\ t) = x(z,\ \mathrm{H}+d\mathrm{H},\ t+dt) \qquad y(z,\ \mathrm{H},\ t) = y(z,\ \mathrm{H}+d\mathrm{H},\ t+dt)$$

d'où

$$x'_{\mathrm{H}}\, y'_t - x'_t\, y'_{\mathrm{H}} = 0$$

Les dérivées partielles de x_0 y_0 z_0 sont

$$x'_{0\mathrm{H}} = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{D}^2} \qquad y'_{0\mathrm{H}} = -\frac{1}{\mathrm{D}^2} \qquad z'_{0\mathrm{H}} = -\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{D}^2}$$

$$x'_{0t} = -\frac{\mathrm{pE}'}{\mathrm{D}^2} \qquad y'_{0t} = -\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{D}^2} \qquad z'_{0t} = -\frac{\mathrm{qE}'}{\mathrm{D}^2}$$

En posant $w = \dfrac{z - z_0}{t}$ celles de x y peuvent s'écrire

$$x'_{\mathrm{H}} = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{D}^2} + w \sin \mathrm{H} - \frac{\mathrm{q} \cos \mathrm{H}}{t\,\mathrm{D}^2} \qquad y'_{\mathrm{H}} = -\frac{1}{\mathrm{D}^2} + w \sin \mathrm{H} + \frac{\mathrm{q} \sin \mathrm{H}}{t\,\mathrm{D}^2}$$

$$x'_t = -\frac{\mathrm{pE}'}{\mathrm{D}^2} + \frac{w \cos \mathrm{H}}{t} - \frac{\mathrm{qE}' \cos \mathrm{H}}{t\,\mathrm{D}^2} \qquad y'_t = -\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{D}^2} - \frac{w \sin \mathrm{H}}{t} + \frac{\mathrm{qE}' \sin \mathrm{H}}{t}$$

Après réduction, en posant u = cos H + p sin H et v = p cos H− sin H, la condition de contact $x'_{\mathrm{H}} y'_t - x'_t y'_{\mathrm{H}} = 0$ devient

$$w = \frac{u + \mathrm{E}'(\mathrm{q} + vt)}{\mathrm{D}^2}$$

Cette expression permet de calculer w pour un couple de paramètres H, t et d'en déduire les coordonnées du point de contact B du rayon utile correspondant avec la surface enveloppe :

$$\mathrm{X} = x_0 - w \cos \mathrm{H} \qquad \mathrm{Y} = y_0 + w \sin \mathrm{H} \qquad \mathrm{Z} = z_0 + wt$$

Ces X, Y, Z sont 3 fonctions de H, t, différentes des fonctions x et y de z, H, t considérées plus haut.

La section de la surface enveloppe par un plan $z = \mathrm{C}^{te}$ est une courbe donnée sous forme paramétrique par les deux expressions ci-dessus de X, Y, où les paramètres H, t sont liés par la relation $\mathrm{Z}(\mathrm{H}, t) = z_0 + wt = \mathrm{C}^{te}$. On peut la construire point par point : pour une suite de valeurs de H on résoud en t l'équation $\mathrm{Z}(\mathrm{H}, t) = z = \mathrm{C}^{te}$, et l'on reporte H et t dans X, Y. Pour résoudre l'équation on peut utiliser la méthode de Newton, qui fait intervenir la dérivée partielle de Z par rapport à t. En posant D' = p cos(H+E) − sin(H+E) on trouve

$$\mathrm{D}^3 \mathrm{Z}'_t = t\,(\mathrm{q} + vt)\,(\mathrm{DE}'' - 2\,\mathrm{D}'\mathrm{E}'^2) + 2\mathrm{E}'t\,(1+\mathrm{p}^2)\sin \mathrm{E} + u\mathrm{D}$$

La tangente en un point de la section est définie par

$$d\mathrm{X} = \mathrm{X}'_{\mathrm{H}}\, d\mathrm{H} + \mathrm{X}'_t\, dt \qquad d\mathrm{Y} = \mathrm{Y}'_{\mathrm{H}}\, d\mathrm{H} + \mathrm{Y}'_t\, dt$$

où dH et dt sont liés par

$$\mathrm{Z}'_{\mathrm{H}}\, d\mathrm{H} + \mathrm{Z}'_t\, dt = 0$$

d'où

$$\frac{dX}{dH} = \frac{X'_H\, Z'_t - X'_t\, Z'_H}{Z'_t} \qquad \frac{dY}{dH} = \frac{Y'_H\, Z'_t - Y'_t\, Z'_H}{Z'_t}$$

Sachant que

$$X'_H = -\frac{p}{D^2} + w \sin H - w'_H \cos H = x'_H - \frac{Z'_H \cos H}{t}$$

$$Y'_H = -\frac{1}{D^2} + w \cos H + w'_H \sin H = y'_H + \frac{Z'_H \sin H}{t}$$

$$Z'_H = -\frac{q}{D^2} + t\, w'_H$$

$$X'_t = -\frac{pE'}{D^2} - w'_t \cos H \qquad = x'_t - \frac{Z'_t \cos H}{t}$$

$$Y'_t = -\frac{E'}{D^2} + w'_t \sin H \qquad = y'_t + \frac{Z'_t \sin H}{t}$$

$$Z'_t = -\frac{qE'}{D^2} + w + t w'_t$$

ces dérivées peuvent aussi s'écrire

$$\frac{dX}{dH} = \frac{x'_H\, Z'_t - x'_t\, Z'_H}{Z'_t} \qquad \frac{dY}{dH} = \frac{y'_H\, Z'_t - y'_t\, Z'_H}{Z'_t}$$

La première des deux peut s'annuler si x'_H et x'_t s'annulent simultanément, ce qui se produit si $tE' = \operatorname{cotg} H$. On a alors un extremum de X. La seconde peut s'annuler si $tE' = -\operatorname{tg} H$, et l'on a un extremum de Y. Elles s'annulent simultanément si

$$x'_H\, Z'_t - x'_t\, Z'_H = 0$$

car la condition de contact entraîne la nullité de l'expression analogue pour Y. On a alors un point de rebroussement.

Les dérivées partielles de w sont

$$D^3 w'_H = Dv - 2D'u - E't\,(Du + 2D'v) - 2q\,D'E'$$
$$D^3 w'_t = D(q + vt)E'' + E'(Dv - 2D'u) - 2D'E'^2(q + vt)$$

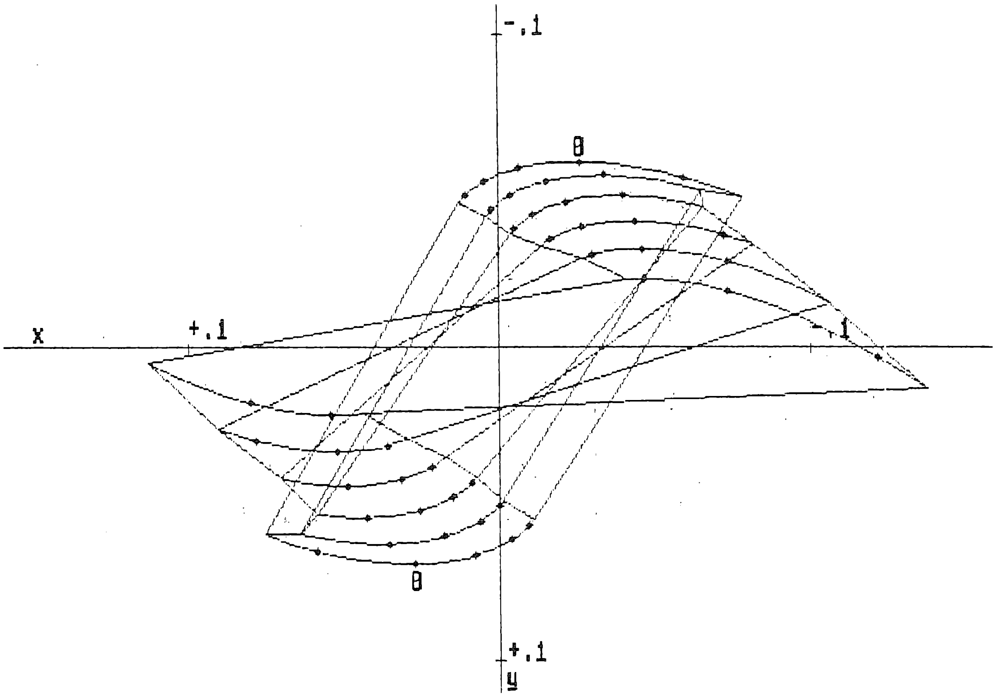
et on peut exprimer numériquement la condition de rebroussement, sans qu'il soit nécessaire de développer son expression.

9. EXEMPLE

Pour une ligne graduée horizontale déclinante de 17° vers l'Est, correspondant à un cadran (du matin) en projet à la latitude de 48°,388, on a p = -0,22858 et q = -0,20303. La détermination du profil du style donne une surface assez tourmentée, hérissée d'arêtes de rebroussement délimitant des parties irréalisables de la surface. La figure ci-dessous en montre les sections par des plans z = Constante, pour la partie centrale du solide.

10. EQUATION DU TEMPS ET SES DÉRIVÉES

On a utilisé l'algorithme suivant pour le calcul de l'équation du temps. Soit l la longitude vraie apparente du Soleil, ω l'obliquité de l'écliptique, e l'excentricité de l'orbite terrestre, ϖ la longitude du périgée. On calcule successivement l'anomalie vraie v, l'anomalie excentrique u, l'anomalie



moyenne M, la longitude moyenne L, la déclinaison δ, l'ascension droite α, l'équation du temps E, par les formules

$$v = l - \varpi \qquad \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\;\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} \qquad M = u - e\sin u \qquad L = \varpi + M$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos l \qquad \sin\alpha\cos\delta = \cos\omega\sin l \qquad \sin\delta = \sin\omega\sin l$$

$$E = \alpha - L$$

Pour la date 1992,0 les valeurs des éléments sont

$$\omega = 23°{,}44 \qquad e = 0{,}016711 \qquad \varpi = -77°{,}2094$$

La dérivée de E par rapport à t = tg δ est donnée par

$$r = 1 - e\cos u \qquad a = \cos^2 l + \cos^2\omega\sin^2 l \qquad A = \frac{\cos\omega}{a} - \frac{c^2}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$E' = \frac{dE}{dt} = \frac{A\cos^3\delta}{\sin\omega\cos l}$$

La dérivée seconde est

$$E'' = \frac{d^2E}{dt^2} =$$

$$\frac{E'\cos^3\delta}{\sin\omega\cos l}\left(\frac{2\left(\dfrac{\cos\omega\sin^2\omega\cos^2 l\sin l}{a^2} - \dfrac{ea^2\sin u}{(1-e^2)}\right)}{A} + \mathrm{tg}\,l - \frac{3\sin\omega\cos l\sin\delta}{\cos^2\delta}\right)$$