

Les cadrans solaires bifilaires à gnomons rectilignes quelconques

Dominique COLLIN
m.él. : dcollin@netcourrier.com

Membre de la Commission des Cadrans Solaires de la S.A.F.

Calais
Juin 2001-Novembre 2002

Résumé : Les cadrans solaires à "système bifilaire généralisé" constituent une ultime extension du bifilaire inventé par H. Michnik voici près de 80 ans. Dans le système bifilaire généralisé les plans contenant les fils sont parallèles au plan du cadran, et les fils font entre eux un angle « j » quelconque. Le bifilaire généralisé possède une multitude de propriétés très curieuses et si originales qu'elles n'ont jamais pu être envisagées dans la gnomonique classique.

A partir de l'analyse des coordonnées générales du point d'ombre, on démontre que l'on peut obtenir une inclinaison réglable à volonté de la ligne d'horizon, de la ligne de midi et de la sous-style.

Les courbes de hauteurs ne sont plus exclusivement des hyperboles : pour des valeurs discrètes de la hauteur h , elles peuvent être des paraboles ou des ellipses (l'arc de cercle est un cas impossible).

Les courbes de dates (ou arcs diurnes) seront toujours des sections coniques, mais leur étude générale est difficile tant les paramètres intervenant sont nombreux. Cependant, l'étude de la ligne diurne la plus simple qu'est l'équinoxiale conduit à une propriété curieuse et très récemment explorée par les gnomonistes : l'inclinaison de l'équinoxiale sur la ligne d'horizon est réglable par le système bifilaire !

Le bifilaire généralisé offre une autre propriété très intéressante qui est celle de pouvoir tracer des lignes horaires homogènes. On démontrera pour cela qu'il existe deux critères fondamentaux : un critère métrique et un critère angulaire. Que le plan du cadran soit dans le plan du méridien, déclinant, incliné et déclinant ou horizontal, on peut toujours construire un bifilaire équiangulaire par un ajustement simultané de l'angle « j » et de l'écartement mutuel « e » des deux fils. La déclinaison gnomonique et la latitude du lieu du cadran ne sont plus les seuls critères limitatifs et ce, grâce aux nouveaux paramètres ($a; b; j_1; j_2$) introduit par le système bifilaire généralisé.

Abstract: Sundials "bifilar system generalized" establish an ultimate extension of the bifilar invented about 80 years ago by H. Michnik. In this bifilar system the plans containing the threads are parallel to the plan of the dial, and the threads make among them an angle "j". The generalized bifilar possesses a multitude of properties very curious and so original as they could never be envisaged in the classic gnomonic.

From the analysis of the general coordinate's point of shadow, we demonstrate that we can obtain an adjustable slope at will of the horizon, the noon's line and of her under-style.

The altitude's curves are not any more exclusively hyperbolas: for discrete values of the altitude h , they can be parabolas or ellipses (the arc of a circle is an impossible case).

The diurnal's curves will always be conical sections, but their general study is difficult so much the occurring parameters are numerous. However, the study of the simplest diurnal line that is the equinoxial run in a curious property and very recently investigated by gnomonist: the slope of the equinoxial on the horizon is adjustable by the bifilar system!

The generalized bifilar offers another very interesting property which is that to be able to draw homogeneous hours lines. We will demonstrate that there are two fundamentals criteria: a metric criterion and an angular criterion. Any plan of the dial in the plan of the meridian, declining, tilted and declining or horizontal, we can always build an equiangular bifilar by a simultaneous adaptation of the angle "j" and of the mutual space "e" of both threads. The dial's declination and the latitude of the dial are not any more in the only restrictive criteria then, thanks to the new parameters ($a; b; j_1; j_2$) introduced by the system bifilar generalized.

Les notations qui interviennent sont celles qui ont été définies et adoptées dans une précédente étude (Collin, 2000). De nouvelles notations seront introduites et définies ci-après. Les gnomons seront considérés comme rectilignes et sans épaisseur.

1. LE SYSTEME BIFILAIRE DANS LES CADRANS SOLAIRES VERTICAUX

Le cadran solaire bifilaire, depuis son introduction au début du XX^e siècle, a connu de nombreux développements axés principalement sur la forme des fils porte-ombre que l'on appellera sous un terme générique simplificateur : "système bifilaire". De fils droits aux fils courbes en passant par l'association d'un fil et d'une plaque circulaire, où encore de deux cylindres en guise de gnomons, les situations éclosent et se diversifient. Les explications détaillées ci-après ne dérogeront pas à cette règle.

Dans cette présentation, on finalisera la notion de bifilaire au sens de Michnik, de sorte que l'on peut prétendre

résoudre tous les cas envisageables de cadrans solaires ayant un système bifilaire dont la définition est donnée ci-après.

1.1 Définition

On appellera dans cet article système bifilaire l'ensemble disjoint de deux gnomons contenus dans des plans parallèles au plan du cadran :

- le plan Π_1 est parallèle à Π_{VD} et est perpendiculaire à (Mx) en M_1 .
- le plan Π_2 est parallèle à Π_{VD} et est perpendiculaire à (Mx) en M_2 .

On désignera les gnomons par F_1 et F_2 .

- F_1 est contenu dans le plan Π_1 et est placé à la distance a .
- F_2 est contenu dans le plan Π_2 et est placé à la distance b .

On utilisera l'écartement e entre les plans Π_1 et Π_2 avec $e = b - a$. C'est aussi l'écartement entre les gnomons. Sauf exception, on considérera toujours : $b > a$.

1.2 Description des différents systèmes bifilaires

1.2.1 Les systèmes bifilaires orthogonaux

1.2.1.1 Le bifilaire de Michnik

La première description d'un système bifilaire appliqué à un plan horizontal est due à Hugo Michnik (Michnik, 1922). La table I ci-dessous résume les principales caractéristiques de ce système.

TABLE I : Le système bifilaire de Michnik (cadran horizontal)

Fils	Propriété des Fils	Position	Direction	Distance au plan du cadran
F_1	$F_1 \perp F_2$	Horizontal	Est-Ouest	a
F_2		Horizontal	Nord-Sud	b

Observons dans les figures 1 et 2 les différentes positions des gnomons.

La configuration de la figure 1 est celle utilisée par H. Michnik. On passe de la figure 1 à la figure 2 en effectuant une rotation de 90° du couple de gnomons.

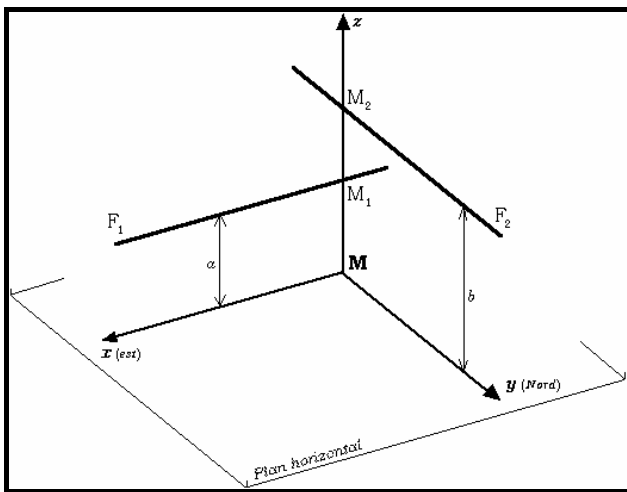


Fig. 1 : Système bifilaire de Michnik

Au niveau de l'expression des coordonnées x et y du point d'ombre, on démontre que la forme fonctionnelle est la même et qu'il y a un échange, d'une coordonnée à l'autre, des coefficients multiplicateurs que sont a et b , comme le montre la table II pour le cadran horizontal.

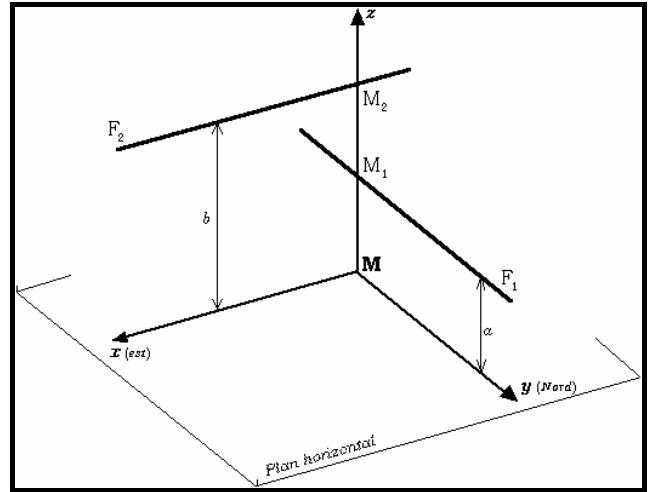


Fig. 2 : Autre configuration (Rotation de 90°)

1.2.1.2 Le bifilaire "standard" pour les plans verticaux déclinants

Si l'on place maintenant le plan du cadran de Michnik dans le plan du premier vertical, on obtient un cadran plein sud avec F_1 horizontal, dans la direction est-ouest et F_2 vertical (direction zénith-nadir). C'est le premier système bifilaire appliqué au plan vertical.

On l'appellera "système bifilaire standard". Sa description la plus générale et valable pour tout plan vertical déclinant est donnée en table III.

Dans la figure 3, on désigne par A la configuration déjà utilisée dans une précédente étude sur le cadran bifilaire vertical déclinant (Collin, 2000). La configuration B de la figure 4 s'obtient par une rotation en bloc de 90° des gnomons de la configuration A . On observera à partir des coordonnées du point d'ombre P de la table III, l'équivalence fonctionnelle entre les configurations A et B de ce système bifilaire.

Cette équivalence se traduit par un échange des coefficients a et b entre les coordonnées du point d'ombre.

TABLE II : Les configurations du système bifilaire de Michnik

Fils	Propriété des fils	Direction	Distance au plan du cadran	Coordonnées locales du point d'ombre P
Figure 1	F_1	est-ouest	a	$\begin{cases} x = a \frac{\sin Az}{\tan h} \\ y = b \frac{\cos Az}{\tan h} \end{cases}$
	F_2	nord-sud	b	
Figure 2	F_1	nord-sud	a	$\begin{cases} x = b \frac{\sin Az}{\tan h} \\ y = a \frac{\cos Az}{\tan h} \end{cases}$
	F_2	est-ouest	b	

TABLE III : Le Système bifilaire standard (*cadran vertical déclinant*)

Propriété des plans contenant les gnomons	F ₁	F ₂	Propriété des fils	Configuration	Coordonnées locales du point d'ombre P
$\Pi_1 // \Pi_2 // \Pi_{VD}$ Π_1 à la distance a Π_2 à la distance b	Vertical	Horizontal	$F_1 \perp F_2$	A (Figure 3)	$\begin{cases} y = -a \tan(Az - D) \\ z = b \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$
	Horizontal	Vertical	$F_1 \perp F_2$	B (Figure 4)	$\begin{cases} y = -b \tan(Az - D) \\ z = a \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$

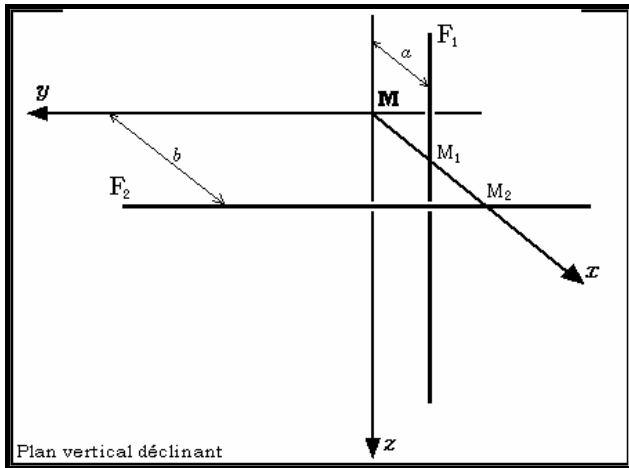


Fig. 3 : Système bifilaire "standard" en configuration A

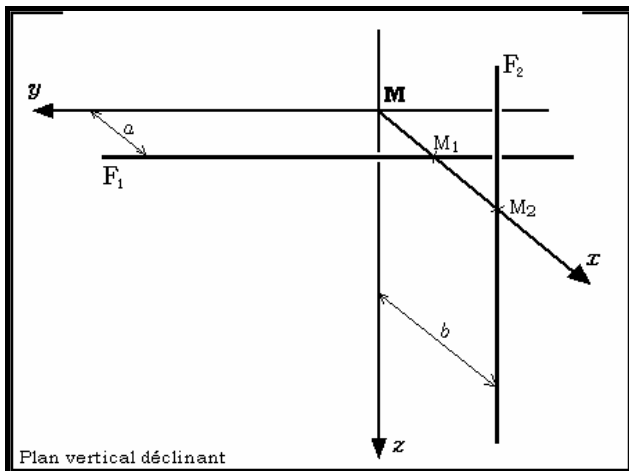


Fig. 4 : Système bifilaire "standard" en configuration B

trigonométrique depuis l'horizontale (My). On obtient un système à fils incliné qu'on appellera "orthobifilaire" comme on peut le voir schématisé en figure 5.

Le mot "orthobifilaire" représente une première généralisation du système de Michnik et par extension de tout système dont les gnomons sont perpendiculaires entre eux et caractérisé par l'angle de position f .

La table IV donne le détail des caractéristiques de l'orthobifilaire. L'intérêt d'utiliser un tel ensemble de fils vient des propriétés que l'on peut obtenir pour les lignes horaires du cadran vertical déclinant (*Savoie*, octobre 2001). On démontrera plus en avant dans cette étude qu'un ajustement convenable de la distance mutuelle des fils puis de l'angle que fait le système bifilaire avec l'horizontale, permet d'obtenir des lignes horaires homogènes (lignes espacées de 15° par heure pleine).

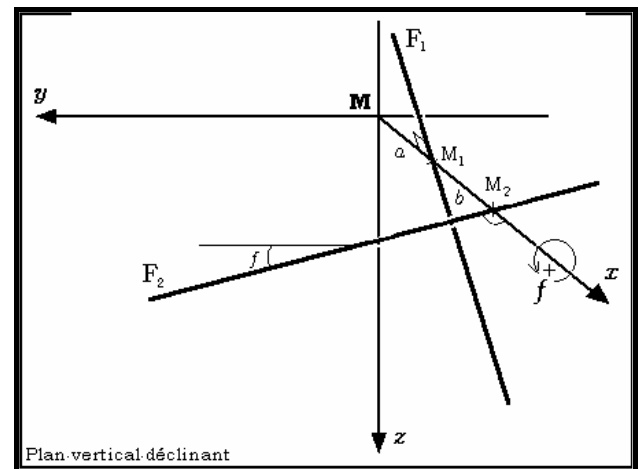


Fig. 5 : Le système "orthobifilaire" en position angulaire f

1.2.1.3 L'orthobifilaire

Maintenant faisons subir au système bifilaire standard une rotation en bloc d'un angle $f = (\widehat{My, F_2})$ dans le sens

Bien que l'orthobifilaire paraît être une généralité pour le système bifilaire de Michnik et pour le système standard, il n'est en fait qu'un cas très particulier d'un système bifilaire encore plus général que l'on va maintenant décrire.

TABLE IV : Le Système orthobifilaire

Propriété des plans contenant les gnomons	Propriété des fils	Position du système bifilaire	Cas particuliers
$\Pi_1 // \Pi_2 // \Pi_{VD}$ Π_1 à la distance a Π_2 à la distance b	$F_1 \perp F_2$	$(\widehat{My, F_2}) = f$ avec : $f \neq 0^\circ$ et $f \neq 90^\circ$.	$f = 0^\circ$: Système bifilaire standard A $f = 90^\circ$: Système bifilaire standard B

1.2.2 Le système bifilaire généralisé

Dans ce nouveau système, les gnomons n'ont aucune position particulière : leur orientation est libre dans les plans parallèles Π_1 et Π_2 . Aussi pour pouvoir les installer on utilisera l'angle que chacun des gnomons fait avec l'horizontale (My). Dans la figure 6, les plans Π_1 et Π_2 n'ont pas été représentés par souci de clarté. On trouvera en table V les caractéristiques de ce système bifilaire. Les rotations d'angle j_1 et j_2 des fils F_1 et F_2 s'effectuent dans le sens direct respectivement autour de M_1 et M_2 , seuls points fixes des gnomons lors de cette rotation. Cette invariance sera exploitée dans la détermination des coordonnées du point d'ombre P (voir démonstration §2.1).

Les configurations représentées dans les figures 3, 4 et 5 deviennent alors des cas particuliers que l'on peut retrouver facilement grâce aux valeurs données aux angles j_1 et j_2 ...

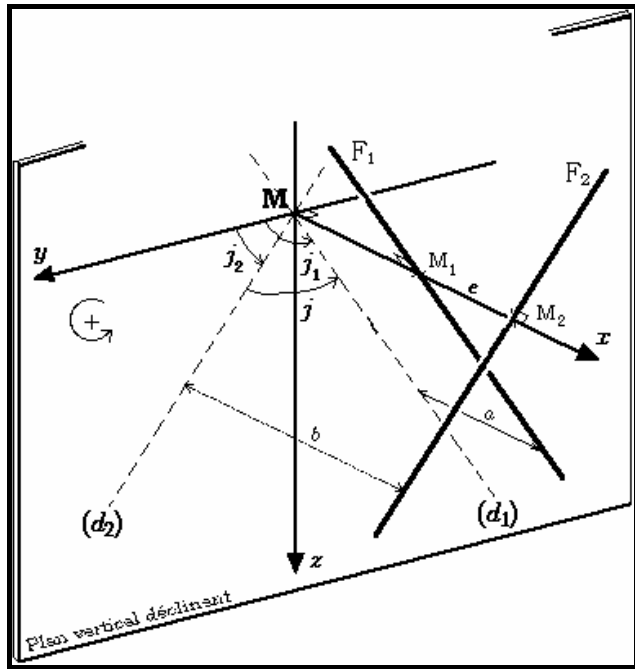


Fig. 6 : Le système bifilaire généralisé

1.3 Quelques aspects sur la formation du point d'ombre P

1.3.1 Les projections des gnomons F_1 et F_2

Les plans Π_1 et Π_2 contenant les gnomons sont

respectivement perpendiculaires en M_1 et en M_2 à la normale (Mx) du plan Π_{VD} . Lors de l'installation du système bifilaire, il est indispensable que le gnomon F_1 passe par M_1 , et que le gnomon F_2 passe par M_2 . Dans la projection orthogonale (donc dans la direction (Mx) et lorsque le soleil est à l'horizon : $h=0^\circ$), F_1 se projette en (d_1) et F_2 en (d_2) , l'axe (Mx) en M . C'est de cette façon que l'on a construit le repère Myz lorsque F_1 est vertical et F_2 horizontal : les ombres (d_1) et (d_2) sont dans ce cas précis les axes du repère comme on peut le voir dans les figures 7 & 8.

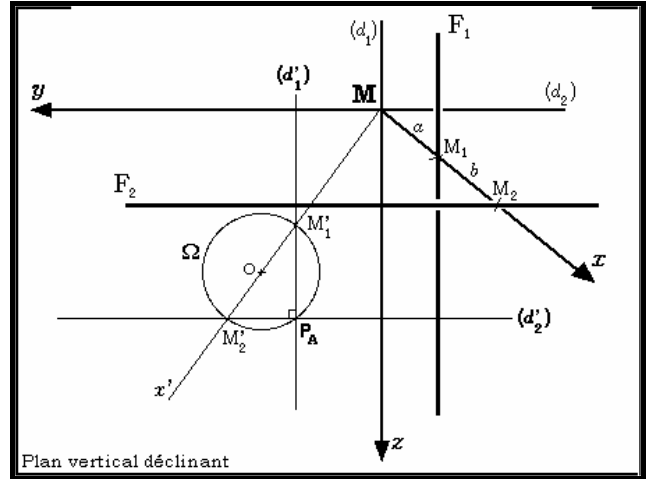


Fig. 7 : Configuration A

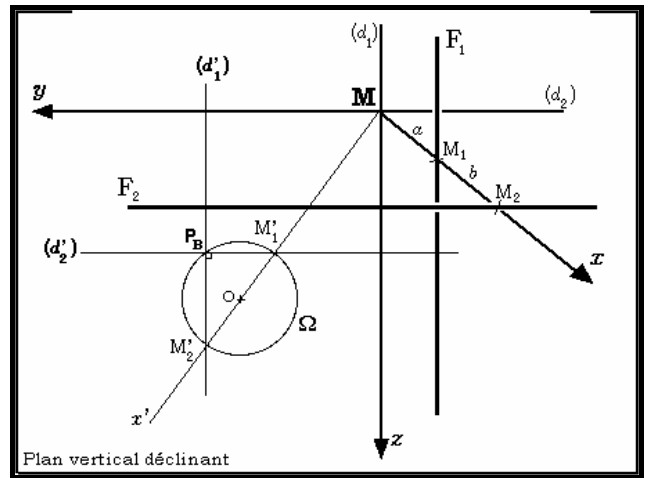


Fig. 8 : Configuration B

TABLE V : Le Système bifilaire généralisé

Propriété des plans contenant les gnomons	Propriété des fils	Position angulaire des gnomons
$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \parallel \Pi_{VD}$ Π_1 à la distance a Π_2 à la distance b	F_1 : en position quelconque dans Π_1	$(\widehat{My, F_1}) = j_1$ avec $0^\circ \leq j_1 \leq 180^\circ$
	F_2 : en position quelconque dans Π_2	$(\widehat{My, F_2}) = j_2$ avec $0^\circ \leq j_2 \leq 180^\circ$
		$(\widehat{F_1, F_2}) = j$ avec $0^\circ < j < 180^\circ$
		et $j = j_1 - j_2 \neq 0$.
		(angles comptés dans le sens direct)

En un instant moyen t , donc lors d'une projection selon une direction quelconque h , la normale (Mx) se projette en (Mx') dans le plan Π_{VD} . Sur (Mx') , M_1 se projette en M'_1 , M_2 se projette en M'_2 . Dans cette même projection, l'ombre (d'_1) de F_1 passe par M'_1 et l'ombre (d'_2) de F_2 passe par M'_2 . L'intersection des ombres (d'_1) et (d'_2) donnera le point d'ombre recherché.

1.3.2 Cas de gnomons orthogonaux

La projection selon une direction h étant une projection conforme pour les angles, lorsque les gnomons seront perpendiculaires entre eux, il en sera de même des ombres (d'_1) et (d'_2) – voir figures 7, 8 & 9.

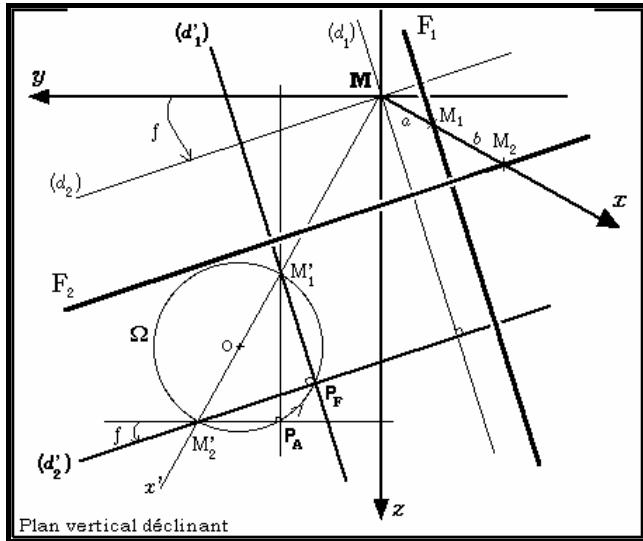


Fig. 9 : Configuration "orthobifilaire" F

Dans le plan Π_{VD} de la configuration bifilaire A (figure 7), les points M'_1 , M'_2 et le point d'ombre P_A sont les sommets d'un triangle rectangle. L'hypoténuse du triangle $M'_1M'_2P_A$ est le diamètre d'un cercle Ω de centre O , milieu de $[M'_1M'_2]$. Le cercle Ω est appelé *cercle instantané de position du point d'ombre*.

Toute rotation de 90° de ce système bifilaire, place tout point d'ombre de la configuration A en des points diamétralement opposés comme on peut le constater sur la figure 8. Toute position intermédiaire du système bifilaire, comme la configuration F d'inclinaison f (voir figure 9), conduit le point d'ombre à se déplacer sur le cercle Ω pour former le point d'ombre P_F . Le déplacement de P_A en P_F sur Ω s'effectue dans le même sens que la rotation en bloc des fils menant à la configuration F.

D'une façon générale, dans un système orthobifilaire, le point d'ombre se trouve sur ce cercle Ω dont le rayon et la position varient en fonction de $(Az; h)$ et donc en fonction du temps. Sous ce point de vue, on établit facilement les coordonnées du point d'ombre P_F à partir de la configuration A ou B. Cette démonstration ne sera pas faite ici puisque le système bifilaire supérieur à l'orthobifilaire appelé ci-après "généralisé" renvoie ce dernier au rang de cas particulier ! Précisons enfin que l'usage du cercle Ω a constitué une étape élégante et efficace dans la détermination de la position de P_F , avant d'envisager le cas beaucoup plus général qui est étudié ici.

1.3.3 Cas le plus général

Lors d'une projection orthogonale (projection selon la direction (Mx)) les gnomons F_1 et F_2 se projettent en (d_1) et (d_2) comme le montre la figure 10. Ces projections orthogonales passent par l'origine M et possèdent respectivement la même position angulaire j_1 et j_2 que les gnomons. L'angle j est l'angle entre les droites (d_1) et (d_2) , et par conséquent l'angle entre les gnomons.

En un instant moyen t , il est acquis que d'une part l'ombre (d'_1) de F_1 passant par M'_1 est parallèle à (d_1) et l'ombre (d'_2) de F_2 passant par M'_2 est parallèle à (d_2) et que d'autre part le point d'ombre P est à l'intersection des projections de F_1 et F_2 dans le plan du cadran, c'est-à-dire : $P = (d'_1) \cap (d'_2)$.

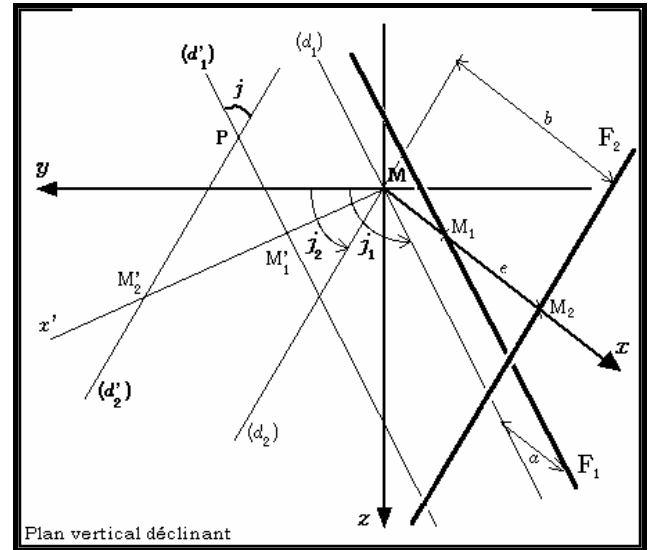


Fig. 10 : Formation de l'ombre dans un cadran solaire bifilaire généralisé

La construction de P est ainsi assurée comme on peut le voir sur la figure 10. Pour trouver les coordonnées locales de P il suffira alors de déterminer les équations des droites (d'_1) et (d'_2) puis les coordonnées de leur point d'intersection. C'est ce qui est fait au §2. Remarquons immédiatement que le point d'ombre P peut se trouver au-dessus de l'horizontale (My) .

2. LES COORDONNEES DU POINT D'OMBRE P

2.1 Coordonnées locales de P

Les expressions brutes des coordonnées du point d'ombre P sont données par la relation (1) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \left(\frac{b \sin j_2 \cos j_1 - a \sin j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \tan(Az - D) \\ \quad + \left(\frac{e \cos j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \\ z = \left(\frac{b \sin j_1 \cos j_2 - a \sin j_2 \cos j_1}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \\ \quad + \left(\frac{e \sin j_1 \sin j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \tan(Az - D) \end{array} \right. \quad (1)$$

DEMONSTRATION. Etablir les coordonnées $(y; z)$ de P est relativement simple et si rapide qu'on peut le présenter ici en s'appuyant cependant sur les résultats obtenus lors d'une précédente étude sur les cadrans solaires bifilaires verticaux.

PRELIMINAIRES. Si P_A désigne le point d'ombre dans le cas du système bifilaire standard en configuration A , alors on démontre facilement dans Myz que les coordonnées de P_A , M'_1 et M'_2 ont pour expression :

$$P_A \begin{cases} y_P = -a \times \tan(Az - D) \\ z_P = b \times \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$$

$$M'_1 \begin{cases} y_{M'_1} = -a \times \tan(Az - D) \\ z_{M'_1} = a \times \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$$

$$M'_2 \begin{cases} y_{M'_2} = -b \times \tan(Az - D) \\ z_{M'_2} = b \times \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$$

Les coordonnées de M'_1 et M'_2 sont les mêmes quel que soit le système bifilaire utilisé (cf. définition 1.1). En effet, M'_1 et M'_2 appartiennent à la normale (Mx) qui se projette en (Mx') indépendamment du système bifilaire envisagé. Il en sera donc de même des points M_1 et M_2 des gnomons F_1 et F_2 . Ces points seront dits invariants : la forme fonctionnelle de leurs coordonnées est indépendante du système bifilaire utilisé.

ÉQUATION DE LA DROITE (d'1). Sur la figure 10, l'ombre (d'1) passe par le point M'_1 . La pente de la droite (d'1) dans Myz est $m_1 = 1/\tan j_1$, si l'on adopte une forme en $y = m_1 z + p_1$.

L'ordonnée à l'origine p_1 est donnée par $p_1 = y_{M'_1} - m_1 z_{M'_1}$, c'est-à-dire : $p_1 = -a \tan(Az - D) - a \frac{\tan h}{\tan j_1 \cos(Az - D)}$.

L'équation de la droite (d'1) est par conséquent :

$$(d'_1): y = \frac{1}{\tan j_1} z - a \times \tan(Az - D) - a \frac{\tan h}{\tan j_1 \cos(Az - D)} \quad (2)$$

ÉQUATION DE LA DROITE (d'2). L'ombre (d'2) passe par le point M'_2 . La pente de la droite (d'2) dans Myz est $m_2 = 1/\tan j_2$, si l'on adopte une forme en $y = m_2 z + p_2$. De la même façon, l'équation de la droite (d'2) s'écrira :

$$(d'_2): y = \frac{1}{\tan j_2} z - b \times \tan(Az - D) - b \frac{\tan h}{\tan j_2 \cos(Az - D)} \quad (3)$$

COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION DES DROITES (d'1) ET (d'2). Puisque $P = (d'_1) \cap (d'_2)$, alors $(y)_{d'_1} = (y)_{d'_2}$, ce qui permet de déterminer directement la côte de P .

Côte de P . En regroupant les équations (2) et (3) des ombres des fils et en les multipliant respectivement par $\tan j_1 \tan j_2$, on arrive à un groupe de relations dont l'équivalence conduit directement à z .

On écrit tout d'abord :

$$\begin{cases} y \tan j_1 \tan j_2 = z \tan j_2 - a \tan j_1 \tan j_2 \tan(Az - D) - a \tan j_2 \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \\ y \tan j_1 \tan j_2 = z \tan j_1 - b \tan j_1 \tan j_2 \tan(Az - D) - b \tan j_1 \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases}$$

et après regroupement et factorisation on obtient (4) qui est la côte du point d'ombre P :

$$z = \left(\frac{(b-a) \tan j_1 \tan j_2}{\tan j_1 - \tan j_2} \right) \tan(Az - D) + \left(\frac{b \tan j_1 - a \tan j_2}{\tan j_1 - \tan j_2} \right) \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \quad (4)$$

Afin d'éviter les cas indéterminés dus à la présence des tangentes, une simplification des coefficients de $\tan(Az - D)$ et $\frac{\tan h}{\cos(Az - D)}$ s'impose. Cette simplification amène à considérer les nouveaux coefficients :

$$\begin{cases} \frac{(b-a) \tan j_1 \tan j_2}{\tan j_1 - \tan j_2} = (b-a) \frac{\sin j_1 \sin j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \\ \frac{b \tan j_1 - a \tan j_2}{\tan j_1 - \tan j_2} = \frac{b \sin j_1 \cos j_2 - a \sin j_2 \cos j_1}{\sin(j_1 - j_2)} \end{cases} \quad (5)$$

La côte de P prend finalement pour expression :

$$z = \left((b-a) \frac{\sin j_1 \sin j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \tan(Az - D) + \left(\frac{b \sin j_1 \cos j_2 - a \sin j_2 \cos j_1}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \quad (6)$$

Ordonnée de P . Pour l'obtenir, il suffit de prendre l'une ou l'autre des équations des droites (d'1) et (d'2). C'est ainsi qu'à partir de la relation (2) par exemple, on établit (7) après y avoir substitué (6) et effectué quelques simplifications :

$$y = \left(\frac{b \cos j_1 \sin j_2 - a \sin j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \tan(Az - D) + \left((b-a) \frac{\cos j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \right) \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \quad (7)$$

On regroupe dans (1) les coordonnées (6) et (7) du point d'ombre P . ■

2.2 Autre présentation des coordonnées du point d'ombre P

Si l'on pose g_1, g_2 les gnomons auxiliaires et k_1, k_2 les termes correctifs alors on constitue le groupe de relation (8) :

$$\begin{cases} g_1 = \frac{b \sin j_2 \cos j_1 - a \sin j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \\ g_2 = \frac{b \sin j_1 \cos j_2 - a \sin j_2 \cos j_1}{\sin(j_1 - j_2)} \\ k_1 = e \frac{\cos j_1 \cos j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \\ k_2 = e \frac{\sin j_1 \sin j_2}{\sin(j_1 - j_2)} \end{cases} \quad (8)$$

avec $e = b - a$.

Les coordonnées de P s'écriront plus facilement sous la forme (9) :

$$\begin{cases} y = g_1 \tan(Az - D) + k_1 \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \\ z = k_2 \tan(Az - D) + g_2 \frac{\tan h}{\cos(Az - D)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} y = g_1 \tan(Az - D) \\ y = k_2 \tan(Az - D) \end{cases} \quad (11)$$

L'élimination de $\tan(Az - D)$ des équations (11) fait apparaître immédiatement (12) qui est l'équation de la ligne d'horizon du cadran bifilaire vertical déclinant :

$$y = \frac{g_1}{k_2} z \quad (12)$$

2.3 Les coordonnées horaires

Les relations fondamentales de la trigonométrie sphérique assurent le passage des coordonnées locales aux coordonnées horaires du point d'ombre P . Le système (9) prend la forme complexe (10) ou chacune des coordonnées est une fonction de deux variables (une variable rapide et une variable lente) et de six paramètres.

Il s'agit :

- des variables horaires (t, δ),
- des paramètres :
 - bifilaires : ($a; b; j_1; j_2$),
 - physiques : ($\varphi; D$) :

$$\begin{cases} y = \frac{g_1 [\cos D \sin t - \sin D (\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta)] + k_1 [\sin \varphi \tan \delta + \cos \varphi \cos t]}{\sin D \sin t + \cos D (\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta)} \\ z = \frac{g_2 [\sin \varphi \tan \delta + \cos \varphi \cos t] + k_2 [\cos D \sin t - \sin D (\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta)]}{\sin D \sin t + \cos D (\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta)} \end{cases} \quad (10)$$

3. LES PROPRIETES DU SYSTEME BIFILAIRE GENERALISE

3.1 La ligne d'horizon

C'est le lieu géométrique des points d'ombre pour lesquels la hauteur du soleil est de 0° . Cette ligne peut être vue également comme la limite de fonctionnement du cadran solaire : le point d'ombre ne pourra jamais aller au-delà de cette limite pour le lieu pour lequel il a été calculé (il s'agit en toute rigueur d'un premier régionallement du plan Π_{VD} qui servira à sélectionner les côtes admissibles dans le tracé d'un bifilaire quelconque).

3.1.1 Équation de la ligne d'horizon

Partons des relations (9) et faisons $h=0^\circ$. On obtient :

3.1.2 Positionnement angulaire de la ligne d'horizon

La ligne d'horizon passe par l'origine M du repère. Si on pose $\tan \gamma = g_1/k_2$, alors γ est l'angle, compté dans le sens direct, entre la verticale (Mz) et la ligne d'horizon du cadran. Une remarque immédiate et très importante : la pente de la ligne d'horizon ne dépend que des paramètres du système bifilaire ($a; b; j_1; j_2$). La latitude et l'orientation

du plan du cadran ne jouent aucun rôle sur cette inclinaison. Le calcul de $\tan \gamma$ en substituant les expressions (8) dans la relation (12) conduit à la relation (13) :

$$\tan \gamma = \frac{1}{e} \left(\frac{b}{\tan j_1} - \frac{a}{\tan j_2} \right) \quad (13)$$

A partir de la formule (13), il devient alors facile de paramétrer la ligne d'horizon. En effet, on peut :

- soit connaître la position angulaire γ de la ligne d'horizon,
- soit fixer une valeur à γ en réglant les distances a, b et e , ou encore en déterminant un des deux angles j_1 et j_2 , ce qui offre une multitude de possibilités quand à l'aspect des réseaux de courbes dessinés sur le cadran.

Table VI : Particularités de la ligne d'horizon

Angle γ	Critère ou condition entre a et b	Distance entre les fils	Remarques
$\gamma = 0^\circ$	$\frac{b}{a} = \frac{\tan j_1}{\tan j_2}$	$e = a \left(\frac{\tan j_1}{\tan j_2} - 1 \right)$	Ligne d'horizon verticale. ($j_1; j_2$) quelconques, (mais différents de 0° et 90°)
$\gamma = 45^\circ$	$\frac{b}{a} = \frac{\tan j_1}{\tan j_2} \left(\frac{\tan j_2 - 1}{\tan j_1 - 1} \right)$	$e = \frac{a}{\tan j_2} \left(\frac{\tan j_1 - \tan j_2}{1 - \tan j_1} \right)$	Inclinaison de l'horizon de 45° . j_1 et j_2 à choisir sachant que $a > 0$ et $b > 0$.
$\gamma = 90^\circ$	$(j_1; j_2) = (0^\circ; \neq 0^\circ)$ ou $(j_1; j_2) = (\neq 0^\circ; 0^\circ)$	Quelconque ($e \neq 0$)	Ligne d'horizon horizontale. ($a; b$) quelconques avec $a \neq b$.

La table VI ci-dessus donne les relations qui peuvent exister entre γ et la position du système bifilaire caractérisé par le quadruplet $(a; b; j_1; j_2)$:

Obtenir une ligne d'horizon verticale n'a jamais pu être envisagé dans toute l'histoire de la gnomonique, ni même encore une ligne de midi horizontale ou mieux encore, inclinable à volonté ! Cela provenait essentiellement du fait que les seuls paramètres clivant les réseaux de courbes étaient φ et D . Dans le bifilaire généralisé, ceux-ci continuent d'agir sur les réseaux de courbes mais ils ne sont plus les seuls : les gnomons F_1 et F_2 agissent directement et profondément sur ces réseaux de courbes et en particulier sur les lignes spéciales que sont la ligne de midi, la sous-styloire, la ligne d'horizon, l'équinoxiale du bifilaire généralisé.

3.2 La ligne de Midi

3.2.1 Équation de la ligne de Midi

La ligne de midi est l'ensemble des points pour lesquels l'angle horaire du soleil est nul, c'est-à-dire pour $t=0^\circ$ ou $Az=0^\circ$. Il est clair qu'il faut partir du système de coordonnées (9) et considérer $Az=0^\circ$. On obtiendra (14) :

$$\begin{cases} y = -g_1 \tan D + k_1 \frac{\tan h}{\cos D} \\ z = -k_2 \tan D + g_2 \frac{\tan h}{\cos D} \end{cases} \quad (14)$$

C'est en isolant $\tan h$ dans chacune des relations de (14), puis en posant leur équivalence que l'on obtiendra l'équation de la ligne de midi. C'est la relation (15).

$$y = \frac{k_1}{g_2} z + \frac{ab}{g_2} \tan D \quad (15)$$

3.2.2 Le positionnement angulaire de la ligne de midi

Relativement au repère Myz , la ligne de midi est affine et pour $D = 0^\circ$ elle est linéaire.

1) Lorsque $D \neq 0^\circ$, l'ordonnée à l'origine y_0 est donnée par :

$$y_0 = \frac{ab}{g_2} \tan D \quad (16)$$

2) L'angle α_0 entre la verticale (Mz) et la ligne de midi est donnée par la formule (17) :

$$\tan \alpha_0 = \frac{k_1}{g_2} = \frac{e}{b \tan j_1 - a \tan j_2} \quad (17)$$

PROPRIETES. De la relation (17) on peut affirmer que la valeur de l'angle α_0 est indépendante de la latitude et de l'orientation du plan du cadran. Par contre, et cela était prévisible, la position du point d'intersection de la ligne de Midi avec l'horizontale du lieu est fonction de la déclinaison gnomonique D et du quadruplet $(a; b; j_1; j_2)$.

3.2.3 Les cas particuliers

La table VII donne les relations qui peuvent exister entre α_0 et la position angulaire du système bifilaire caractérisée par le quadruplet $(a; b; j_1; j_2)$. L'orthogonalité entre la ligne de Midi et la ligne d'horizon est également abordée. La ligne de midi ne sera verticale que lorsque l'un des gnomons est vertical.

3.3 La sous-styloire

La sous-styloire est une ligne fondamentale dans tout cadran solaire vertical, incliné ou déclinant. Elle porte en elle plusieurs formulations pour ce qui est de sa définition, d'ailleurs toutes équivalentes, reflétant seulement l'approche qu'exerce le gnomoniste pour construire son cadran solaire.

Table VII : Particularités de la ligne de Midi

Angle α_0	Critère ou condition entre a et b	Distance entre les fils	Remarques
$\alpha_0 = 0^\circ$	$(j_1; j_2) = (90^\circ; \neq 90^\circ)$ ou $(j_1; j_2) = (\neq 90^\circ; 90^\circ)$	Quelconque	La ligne de midi est verticale. Un gnomon est vertical, le deuxième doit être incliné. $(a; b)$ quelconque avec cependant $a \neq b$.
$\alpha_0 = 90^\circ$	$\frac{b}{a} = \frac{\tan j_2}{\tan j_1}$	$e = a \left(\frac{\tan j_2}{\tan j_1} - 1 \right)$	La ligne de midi est horizontale. $j_2 > j_1$ pour que $b > a$ (c'est-à-dire $e > 0$).
$\tan \gamma \times \tan \alpha_0 = -1$	$g_1 k_1 + g_2 k_2 = 0$ ou $\frac{b}{a} = \frac{\sin 2j_1}{\sin 2j_2}$	$e = a \left(\frac{\sin 2j_1}{\sin 2j_2} - 1 \right)$	La ligne d'horizon est perpendiculaire à la ligne de Midi. Les gnomons ne doivent pas être orthogonaux ($ j_1 - j_2 \neq 90^\circ, a \neq b$.)
$\tan \alpha_0 = \frac{1}{\tan j_1 + \tan j_2}$	$\frac{b}{a} = \frac{\tan j_1}{\tan j_2}$	$e = a \left(\frac{\tan j_1}{\tan j_2} - 1 \right)$	Si on impose une ligne d'horizon verticale, alors la ligne de midi est inclinée d'un angle α_0 . Il faut j_1 et $j_2 \neq 0^\circ$.

On adoptera à cause du système bifilaire utilisé, la définition suivante :

"la sous-styloire est la ligne horaire de l'instant du passage du soleil dans le plan normal au plan du cadran". (Bien qu'il n'y ait pas de style proprement dit, on conserve le terme de "sous le style").

On se propose de déterminer :

- l'angle horaire noté t_{ss} de cet événement
- l'angle α_{ss} que cette ligne horaire fait avec la verticale Mz du cadran solaire.

3.3.1 Angle horaire de la sous-styloire

Le plan normal au plan du cadran est de toute évidence indépendant des paramètres bifilaires, mais surtout dépendant de la déclinaison gnomonique. Il n'y a donc pas de raison que l'angle horaire de l'instant du passage du soleil dans le plan normal au plan du cadran diffère de celui bien connu du cadran vertical déclinant classique. L'expression fonctionnelle est exactement la même puisque totalement indépendante d'un quelconque repère pris dans le plan du cadran. La relation (18) est l'expression qui permet de calculer l'angle horaire t_{ss} .

$$\tan t_{ss} = \frac{\tan D}{\sin \varphi} \quad (18)$$

DEMONSTRATION. L'explication précédente est suffisante pour justifier (18). Prenons cependant une autre voie pour déterminer t_{ss} (ce qui peut très bien servir de test de validité du modèle utilisé). Partons de la relation fournissant l'angle que les lignes horaires font avec la verticale Mz c'est-à-dire la relation (32) et dérivons-la par rapport à la déclinaison gnomonique D (puisque D est le facteur qui affecte l'instant de passage du soleil dans le plan normal au cadran).

Si on pose Num le numérateur et Den le dénominateur, alors (32) s'écrit :

$$\tan \alpha = \frac{Num}{Den}$$

et sa dérivée par rapport à D :

$$\frac{\partial \tan \alpha}{\partial D} = \frac{Den \times \frac{\partial Num}{\partial D} - Num \times \frac{\partial Den}{\partial D}}{Den^2}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \tan \alpha}{\partial D} = \frac{Den \times [-k_1 \sin D + k_1 \cos D \sin \varphi \tan t]}{Den^2} - \frac{-Num \times [-g_2 \sin D + g_2 \cos D \sin \varphi \tan t]}{Den^2}$$

L'angle horaire de la sous-styloire s'obtiendra en recherchant les zéros de la dérivée de $\tan \alpha$ par rapport à D . La recherche de $\frac{\partial \tan \alpha}{\partial D} = 0$ (en s'aidant de la relation (55) pour les réductions des expressions obtenues) conduit au critère :

$$\tan t \times [-\sin D \cos \varphi + \cos D \cos \varphi \sin \varphi \tan t] = 0$$

En ne conservant dans la résolution de cette équation que la solution convenable, on trouve $\tan t_{ss} = \frac{\tan D}{\sin \varphi}$. ■

3.3.2 Angle entre la verticale Mz et la sous-styloire

L'angle horaire de l'événement correspondant au passage du soleil dans le plan normal au plan du cadran étant

désormais connu, rien n'est alors plus facile que de substituer (18) dans la relation (32) (angle entre la ligne horaire et la verticale) afin de déterminer l'angle que fait la sous-styloire avec la verticale Mz . C'est l'angle horaire "tabulaire" α_{ss} . Ce calcul élémentaire conduit à la relation (19).

$$\tan \alpha_{ss} = \frac{g_1 \sin D + k_1 \tan \varphi}{g_2 \tan \varphi + k_2 \sin D} \quad (19)$$

Si l'angle horaire t_{ss} est totalement indépendant du système bifilaire, il en n'est rien quant à la position géométrique α_{ss} de la trace laissée par ce plan horaire.

On vérifiera que lorsque le plan du cadran est plein sud ($D=0^\circ$), l'angle de la sous-styloire se confond avec la ligne de midi pour prendre la valeur donnée par la relation (17). Grâce à la relation (19), toute liberté est donnée pour étudier la valeur prise par l'angle α_{ss} lorsque le quadruplet ($a; b; j_1; j_2$) prend des valeurs particulières. Les possibilités sont nombreuses dépassant largement le cadre de cet article.

3.3.3 Equation cartésienne de la sous-styloire

Il est très étonnant que la sous-styloire passe par l'origine M du repère. Cela justifie à posteriori la conservation du choix du repère Myz .

D'après ce qui précède on écrit simplement :

$$y = [\tan \alpha_{ss}] \times z \quad (20)$$

La ligne ($C_e M$) est la sous-styloire du cadran solaire bifilaire généralisé comme on pourra le voir dans les quelques figures de la section 8.

3.4 Les coordonnées du centre C_e du cadran

Les lignes horaires L_t sont concourantes en un point C_e appelé centre du cadran. C'est le lieu où l'axe du monde du cadran vertical classique coupe le plan Π_{VD} . Par rapport au bifilaire standard en configuration A , les coordonnées de C_e données par (21) diffèrent par l'ajout de termes correctifs respectivement sur y_{C_e} et z_{C_e} .

$$\begin{cases} y_{C_e} = -g_1 \tan D - k_1 \frac{\tan \varphi}{\cos D} \\ z_{C_e} = -g_2 \frac{\tan \varphi}{\cos D} - k_2 \tan D \end{cases} \quad (21)$$

DEMONSTRATION. Pour déterminer C_e on utilise l'équation cartésienne des lignes horaires (30) étudiées au §5.1 et démontrée à l'annexe 1. On considérera l'intersection de la ligne de midi $L_{t=0}$ avec une ligne horaire L_t quelconque en un instant t .

ÉQUATION CARTESIEENNE DE LA LIGNE DE MIDI. A partir de (30) et en posant $t=0$, on obtient (32).

$$y = \frac{k_1}{g_2} z + ab \tan D \quad (22)$$

De là, il vient que puisque $C_e(y_{C_e}; z_{C_e})$ appartient à la ligne de midi, ses coordonnées doivent vérifier l'équation de cette ligne. C'est ainsi que l'on obtient (23) par substitution des coordonnées de C_e dans (22).

$$y_{C_e} = \frac{k_1}{g_2} z_{C_e} + \frac{ab}{g_2} \tan D \quad (23)$$

COTE DU CENTRE C_e DU CADRAN.

De même, les coordonnées de C_e doivent vérifier l'équation de la ligne horaire L. En substituant (23) dans l'équation générale de la ligne horaire (30) on obtient (24), côte de C_e

$$z_{C_e} = -g_2 \frac{\tan \varphi}{\cos D} - k_2 \tan D \quad (24)$$

ORDONNEE DU CENTRE C_e DU CADRAN.

Il ne reste plus qu'à substituer (24) dans (23) afin d'obtenir l'ordonnée du centre C_e . Cette substitution conduit à la relation (25) qui est en remarquable symétrie avec z_{C_e} .

$$y_{C_e} = -g_1 \tan D - k_1 \frac{\tan \varphi}{\cos D} \quad (25)$$

Le regroupement de (24) et (25) donne (21) qui sont les coordonnées générales du point d'intersection des lignes horaires du cadran solaire bifilaire généralisé. ■

4. COURBES INDEPENDANTES DE (φ, D, Az) ET DE (φ, t)

4.1 Les courbes de hauteur

4.1.1 Équation cartésienne

Les courbes de hauteurs sont les lieux géométriques des points d'ombre dans le plan du cadran pour lesquels la hauteur du soleil est constante. L'équation de ces lieux a pour expression générale :

$$\begin{aligned} & (g_2^2 \tan^2 h - k_2^2) y^2 + (k_1^2 \tan^2 h - g_1^2) z^2 \\ & + 2(g_1 k_2 - g_2 k_1 \tan^2 h) yz + (ab \tan h)^2 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

DEMONSTRATION. Pour établir les équations des lignes indépendantes du triplet (φ, D, Az) il est nécessaire de partir des coordonnées locales (9) établi en §2.2. On peut faire remarquer que Az et D ont une même signification : ce sont des azimuts. On peut donc exprimer l'angle azimutal $(Az-D)$ à partir de son sinus et de son cosinus que l'on établit aisément à partir des relations (9). On obtient les relations (27) et (28) suivantes :

$$\cos(Az - D) = -\frac{ab}{zg_1 - yk_2} \tan h \quad (27)$$

$$\sin(Az - D) = \frac{yg_2 - zk_1}{zg_1 - yk_2} \tan h \quad (28)$$

C'est en formant l'identité remarquable $(27)^2 + (28)^2 = 1$ et en procédant ensuite à sa réduction algébrique que l'on obtient finalement l'équation générale (26). ■

4.1.2 Discussion

La relation (26) n'engendre plus exclusivement des hyperboles, mais des paraboles ou des ellipses pour des valeurs discrètes de h comme on peut le constater déjà en observant les coefficients de la conique. Ces coefficients sont paramétrés par $\tan h$ et peuvent être nuls uniquement pour les coefficients des termes y^2 et z^2 . Leur valeur nulle ou encore leur identité va engendrer, pour une valeur particulière de h , soit une parabole (cas de nullité d'un des coefficients), soit un arc d'ellipse (cas de l'égalité des coefficients concernés).

On pourra s'assurer que lorsque $h=0^\circ$ on retrouve bien la relation (12) qui caractérise la ligne d'horizon de ce cadran vertical déclinant.

4.2 Les droites d'azimut

4.2.1 Équation des droites d'azimut

Les courbes d'azimut sont les lieux des points dans le plan du cadran pour lesquels l'azimut du soleil est constant. L'expression générale des courbes d'azimut est donnée par l'équation (29).

$$y = \frac{k_1}{g_2} z - \frac{ab}{g_2} \tan(Az - D) \quad (29)$$

DEMONSTRATION 1. Par leur définition même, les courbes d'azimut sont indépendantes de (φ, h) . Puisque les équations (9) ne comportent pas *explicitement* la latitude du lieu du cadran, on cherchera à éliminer la hauteur h afin de faire resurgir la dépendance en Az . C'est ainsi qu'on pourra exprimer de deux façons équivalentes $\tan h$. Et de cette équivalence, on obtiendra directement l'équation recherchée (29). ■

DEMONSTRATION 2. Le rapport des équations (28)/(27) suivi de sa réduction algébrique conduit directement à l'équation recherchée (29). ■

4.2.2 Le positionnement angulaire des droites d'azimut

Les courbes d'azimut sont des droites toutes *parallèles* entre elles et de pente commune d'expression :

$$\tan \alpha_0 = \frac{e}{b \tan j_1 - a \tan j_2} \quad (\text{c'est la relation (17)}).$$

La distribution des droites d'azimut est réglée le long de l'axe (My) par l'ordonnée à l'origine : $\left[-\frac{ab}{g_2} \tan(Az - D) \right]$.

5. COURBES INDEPENDANTES DE δ : LES LIGNES HORAIREES

5.1 Équation des lignes horaires

Les lignes horaires dans un cadran solaire en général sont les lieux géométriques des points d'ombre pour lesquels le temps solaire moyen t est constant. Pour le cadran solaire bifilaire généralisé, les lignes horaires sont des droites de paramètre t . L'équation cartésienne la plus générale pour les bifilaires obéissant à la définition donnée au §1.1 est donnée par la relation (30) :

$$\begin{aligned} & \left[g_2 \cos D \cos t + (g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \sin t \right] y \\ & - \left[k_1 \cos D \cos t + (g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi) \sin t \right] z \\ & - ab (\sin D \cos t - \cos D \sin \varphi \sin t) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Les termes auxiliaires $(g_1; g_2)$ et les termes correctifs $(k_1; k_2)$ sont données en (8).

DEMONSTRATION. L'annexe 1 établit la démonstration détaillée de cette importante équation. ■

5.2 Positionnement angulaire des lignes horaires.

L'équation (30) peut aussi se mettre sous une forme plus aisément interprétable : $y = mz + p$. Expression dans laquelle "m" est la tangente de l'angle entre l'axe vertical (Mz) et la ligne horaire L, et "p" l'ordonnée à l'origine c'est-à-dire l'intersection de la ligne horaire L avec l'axe horizontal (My). A partir de (30) on établit facilement l'expression (31).

$$y = \left[\frac{k_1 \cos D + (g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi) \tan t}{g_2 \cos D + (g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \tan t} \right] z + ab \left[\frac{\sin D - \cos D \sin \varphi \tan t}{g_2 \cos D + (g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \tan t} \right] \quad (31)$$

ANGLE DES LIGNES HORAIRES AVEC LA VERTICALE (Mz).

On désigne par α l'angle entre une ligne horaire et la verticale matérialisée par (Mz). Cet angle se détermine à partir de la relation (32) :

$$\tan \alpha = \frac{k_1 \cos D + (g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi) \tan t}{g_2 \cos D + (g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \tan t} \quad (32)$$

6. COURBES INDEPENDANTES DE t : LES ARCS DIURNES

EQUATION DE LA QUADRIQUE. La forme générale de l'équation cartésienne des arcs diurnes dans le repère de travail Myz se met sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$f(y; z) = Ay^2 + Bz^2 + 2Cyz + 2Ey + 2Fz + G \quad (33)$$

avec $f(y; z) = 0$

Cette quadrique de forme générale très classique génère des sections coniques selon les valeurs des coefficients A , B , C , E , F et G . (Les sections coniques en question sont soit des droites, des cercles, des ellipses, des paraboles ou des hyperboles).

Les coefficients obtenus après de lourds et de longs développements se mettent sous la forme (34) suivante:

$$\begin{cases} A = \sin^2 \delta (g_2^2 + k_2^2) - (k_2 \sin \varphi - g_2 \cos \varphi \sin D)^2 \\ B = \sin^2 \delta (g_1^2 + k_1^2) - (k_1 \cos \varphi \sin D - g_1 \sin \varphi)^2 \\ C = - \left(\sin^2 \delta (g_1 k_2 + g_2 k_1) + (k_1 \cos \varphi \sin D - g_1 \sin \varphi)(k_2 \sin \varphi - g_2 \cos \varphi \sin D) \right) \\ E = ab \cos D \cos \varphi [k_2 \sin \varphi - g_2 \cos \varphi \sin D] \\ F = ab \cos D \cos \varphi [k_1 \cos \varphi \sin D - g_1 \sin \varphi] \\ G = a^2 b^2 [\sin^2 \delta - \cos^2 D \cos^2 \varphi] \end{cases} \quad (34)$$

DEMONSTRATION. L'annexe 2 établit la démonstration détaillée de l'obtention des six coefficients de la quadrique des arcs diurnes pour un cadran solaire bifilaire généralisé à plan vertical. ■

On trouvera en section 8 quelques tracés de cadrans solaires bifilaires généralisés illustrant quelques particularités de la relation (32) pour les lignes horaires et de la relation (33) pour les arcs diurnes, et en particulier l'équinoxiale.

7. LES BIFILAIRES GENERALISES A LIGNES HORAIRES HOMOGENES

On admet que le système bifilaire envisagé ici réalise au travers de la projection gnomonique, une transformation du mouvement diurne en un mouvement angulaire dans le plan Π_{VD} . On parle de répartition angulaire des lignes horaires, traduction du passage du soleil d'un plan horaire à un autre. La relation (32) assure ainsi le passage du temps solaire moyen t (obéissant à la règle simple des 15° par heure) au temps horaire "tabulaire" α gravé sur le cadran solaire. Si l'on arrive à faire en sorte que l'angle tabulaire α obéisse à cette même règle simple des 15° par heure moyenne, alors on dit que l'on a des lignes horaires *homogènes* et par conséquent un "cadran équiangulaire". Un cadran équiangulaire est un cadran réalisant le fonctionnement d'un cadran solaire équatorial sans toutefois posséder l'inconvénient du passage du soleil aux équinoxes, ni donc le problème de la double face de ce cadran.

On recherche donc des critères dits "*critères d'homogénéité*" de telle sorte que α est proportionnel au temps solaire moyen t . On soupçonne déjà que les deux degrés de liberté du système bifilaire que sont la distance et l'angle entre les fils que l'on peut écrire (e ; j), permettront cette inhabituelle propriété. Il a d'ailleurs été démontré que les systèmes bifilaires standard A et B ne peuvent conduire à des lignes horaires homogènes pour un plan déclinant ($D \neq 0$) (Collin, 2000). L'étude de D. Savoie donne *une* solution pour le vertical déclinant : le système bifilaire est un *orthobifilaire* dont un fil doit se trouver au-dessus de la sous-styloire (angle d'inclinaison f) (Savoie, 2001). L'étude du bifilaire généralisé apporte ici un éventail de possibilités largement plus étendues que les solutions qui existent actuellement.

7.1 Critères d'homogénéité – relations brutes

Les critères généraux qui rendent un cadran bifilaire généralisé équiangulaire sont les critères (35) et (36) :

$$k_1 = -k_2 \frac{\cos \varphi}{\cos D} + g_2 \tan D \sin \varphi \quad (35)$$

$$g_2 = -g_1 \frac{\cos \varphi}{\cos D} - k_1 \tan D \sin \varphi \quad (36)$$

Le critère (35) est le "*critère métrique*": il permettra d'obtenir une condition sur le rapport b/a des gnomons.

Le critère (36) est le "*critère angulaire*": il permettra d'obtenir une condition sur le positionnement angulaire des gnomons.

DEMONSTRATION. Pour obtenir les critères d'homogénéité, il est nécessaire de partir de la seule relation (32) qui donne la distribution angulaire des lignes horaires du bifilaire généralisé. Posons :

$$\begin{cases} u_1 = k_1 \cos D \\ v_1 = g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi \\ u_2 = g_2 \cos D \\ v_2 = g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (37)$$

Les relations de (37) permettent de simplifier l'aspect fonctionnel de (32), ce qui donne (38).

$$\tan \alpha = \frac{u_1 + v_1 \tan t}{u_2 + v_2 \tan t} \quad (38)$$

Le fil conducteur de la recherche de ces critères est d'obtenir après transformation : $\tan \alpha \propto \tan(t + \theta)$. Il est facile de constater que si l'on factorise v_1 et u_2 respectivement au numérateur et au dénominateur, on est directement amené à utiliser la relation trigonométrique $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ pour réduire (38). On a donc tout d'abord (39) en factorisant v_1 et u_2 dans (38) :

$$\tan \alpha = \left(\frac{v_1}{u_2} \right) \frac{\frac{u_1}{v_1} + \tan t}{1 + \frac{v_2}{u_2} \tan t} \quad (39)$$

Puis, si l'on pose maintenant :

$$\tan \theta = \frac{u_1}{v_1} = -\frac{v_2}{u_2} \quad (40)$$

et

$$\frac{v_1}{u_2} = -1 \quad (41)$$

alors, on obtient l'expression recherchée (42) :

$$\tan \alpha = -\tan(t + \theta) \quad (42)$$

Les relations (40) et (41) sont les critères qui permettent d'écrire $\alpha = -(t + \theta) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, avec θ constant (indépendant de t et δ). En substituant alors (37) dans (40) et (41), on obtient définitivement les expressions brutes des très importants critères d'homogénéité (35) et (36). ■

7.2 Critères d'homogénéité – relations pratiques.

7.2.1 Critère angulaire

Celui-ci prend la lourde expression (43) ou de façon arbitraire on exprime j_2 en fonction de j_1 .

$$\tan j_2 = \frac{1 - \cos D \cos \varphi - \sin^2 D \cos^2 \varphi + \tan j_1 \sin D \sin \varphi \cos \varphi}{\tan j_1 \cos \varphi (\cos D - \cos \varphi) - \sin D \sin \varphi \cos \varphi} \quad (43)$$

Si l'on se fixe l'angle j_1 (par exemple pour obtenir des réseaux de courbes particuliers) afin de tracer un réseau de lignes horaires homogènes, il alors est nécessaire que l'angle j_2 soit d'abord calculé par (43). Mais le critère (43) a lui seul n'est pas suffisant pour obtenir la propriété recherchée. La relation métrique (45) est indispensable.

DEMONSTRATION. Si l'on part des relations (40) et (41), on constate que l'on peut écrire $u_1 = v_2$ autrement dit le critère (36). De là, on utilise à nouveau (8) ce qui donne (44).

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos D - \cos \varphi \tan j_1 \tan j_2 - \sin D \sin \varphi \tan j_2}{\cos D - \cos \varphi \tan j_1 \tan j_2 - \sin D \sin \varphi \tan j_1} \quad (44)$$

Or la relation (44) est équivalente à la relation (45). Par identification des rapport b/a , puis par réduction des tangentes en j_1 et j_2 , on est conduit à écrire j_2 en fonction de j_1 par exemple. Ces calculs un peu longs mais sans vraiment de difficultés mènent à la relation (43) qui est le critère angulaire qui permettra d'obtenir des lignes horaires homogènes. ■

7.2.2 Critère métrique

Pour l'établir, on partira du critère général (36) et des expressions utilisées dans la relation (8). On obtient directement (45).

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin D \sin \varphi + \cos \varphi \tan j_1 + \cos D \tan j_2}{\sin D \sin \varphi + \cos D \tan j_1 + \cos \varphi \tan j_2} \quad (45)$$

On pourrait tout aussi bien se satisfaire de (44) comme critère métrique. Mais d'une part, la relation (45) est indispensable pour établir (43) comme on a pu le voir dans ce qui précède, et d'autre part, celle-ci découle très naturellement de la relation brute (36) tout en ayant un aspect fonctionnel plus élégant. Il serait dommage de s'en priver.

D'un point de vue pratique, si l'angle j_1 et la distance a du premier fil sont fixés, la condition (45) permet le calcul de la distance b du fil F_2 pour que l'angle tabulaire α des lignes horaires du bifilaire généralisé soit de 15° par heure moyenne. Il est pour cela indispensable d'avoir utilisé en premier le critère angulaire (43) pour déterminer l'angle j_2 du fil F_2 si l'angle j_1 du fil F_1 est fixé.

7.3 A propos d'une solution particulière : un orthobifilaire équiangulaire

7.3.1 Positionnement angulaire des fils

L'observation du critère angulaire (43) permet d'affirmer que les fils F_1 et F_2 ne sont pas perpendiculaires entre eux. On est en effet dans un cadre très général et si l'on désire que l'intersection des ombres des fils se fasse à angle droit (ce qui est légitime pour une lecture confortable et plus précise), il est alors nécessaire de s'imposer : $\tan j_1 \times \tan j_2 = -1$. Les solutions pour D et φ différents de zéros sont alors donnés par les relations (46).

$$\begin{cases} \tan j_1 = -\frac{\tan \varphi}{\sin D} \\ \tan j_2 = \frac{\sin D}{\tan \varphi} \end{cases} \quad (46)$$

DEMONSTRATION. Substituons par exemple $\tan j_2 = -1/\tan j_1$ dans l'expression (43). On est conduit à résoudre une équation du second degré en j_1 :

$$\tan^2 j_1 + \left(\frac{\tan \varphi}{\sin D} - \frac{\sin D}{\tan \varphi} \right) \tan j_1 - 1 = 0 \quad (47)$$

De façon curieuse, le discriminant de cette équation s'écrit :

$$\Delta = \left(\frac{\tan \varphi}{\sin D} - \frac{\sin D}{\tan \varphi} \right)^2$$

Les solutions sont alors $\tan j_1 = -\frac{\tan \varphi}{\sin D}$ et $\tan j_1' = \frac{\sin D}{\tan \varphi}$.

A ce stade, on peut attribuer indifféremment ces solutions respectivement à j_1 et à j_2 , d'où les expressions (46). ■

7.3.2 Positionnement métrique des fils

La substitution des nouvelles valeurs de j_1 et j_2 dans (45) donnera (48), c'est-à-dire la distance b , pour a donné, à

partir de laquelle il faudra installer le fil F_2 dans le plan Π_2 parallèle au plan Π_{VD} .

$$b = a \cos \varphi |\cos D| \quad (48)$$

7.3.3 Discussion.

On reconnaîtra dans l'expression de l'angle j_1 donné par (46), l'angle que fait la sous-stylaire avec l'horizontale. La sous-stylaire est définie comme étant l'intersection avec \square_{VD} du grand cercle de la sphère céleste contenant le style polaire et la normale au plan Π_{VD} . Pour relier cette définition aux figures précédentes, on dira simplement que la sous-stylaire est la ligne horaire $L_{t_{ss}}$ passant par C_e et M (ligne $C_e M$). On placera donc le fil F_1 au-dessus de la sous-stylaire (donc faisant un angle j_1 avec (My)) et à la distance a de Π_{VD} , puis on installera le fil F_2 perpendiculairement à F_1 (angle j_2) et à la distance b donnée par (48) (Cf. fig. 11 et 12). On peut à ce propos intervertir les valeurs des angles entre j_1 et j_2 , ce qui revient à effectuer une rotation de 90° de ce système bifilaire. On aura toujours des lignes horaires équiangulaires, mais l'aspect du réseau des autres courbes que l'on peut tracer sur le cadran bifilaire ne sera pas le même. Les possibilités offertes sont très nombreuses...

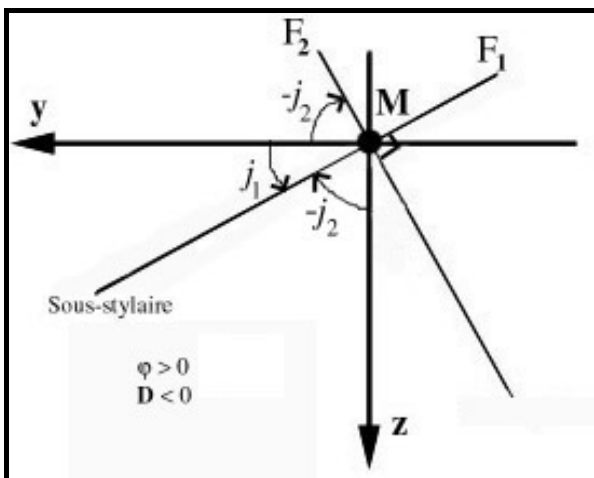
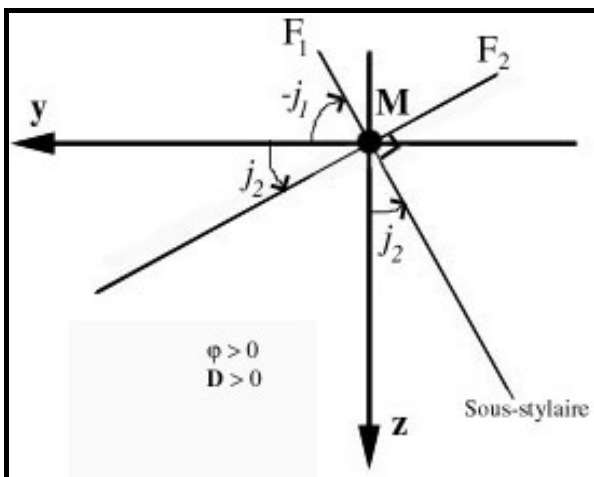


Fig 11 & Fig 12 : Disposition pratique des fils par rapport à la sous-stylaire dans un orthobifilaire équiangulaire.

7.4 Cas généraux.

Table VIII – Les bifilaires équiangulaires

PARAMETRES :		
METRIQUES	ANGULAIRES	"appellation"
$(g_1; g_2; k_1; k_2)$	$(j_1; j_2)$	
$(-a; a \cos \varphi; 0^\circ; 0^\circ)$	$(90^\circ; 0^\circ)$	Standard A ($D=0^\circ$)
$(a; -a \cos \varphi; 0^\circ; 0^\circ)$	$(0^\circ; 90^\circ)$	Standard B ($D=0^\circ$)
$b = a \cos \varphi \cos D $	$\left(-\frac{\tan \varphi}{\sin D}; \frac{\sin D}{\tan \varphi} \right)$	Orthobifilaire (un fil sur la sous-stylaire)
$\frac{b}{a} = H_1(D; \varphi; j_1; j_2)$	$\tan j_2 = H_2(D; \varphi; j_1)$	Bifilaire généralisé

H_1 et H_2 sont respectivement donnés par (45) et (43). Soulignons, pour un cadran solaire bifilaire équiangulaire le plus général, que le cas $|D| = |\varphi|$ est un cas pathologique car cela impose $a=b$: on a à faire à un cadran déclinant classique à style droit pour lequel il n'y a pas homogénéité des lignes horaires...

7.5 Signification de l'angle θ

La relation (42) permet de donner un sens à l'angle θ . C'est l'angle que fait la ligne de midi avec la verticale (Mz). En effet, les lignes horaires sont comptés depuis midi et la relation (42) montre qu'il en est de même avec l'angle horaire tabulaire α à partir de la ligne positionnée par θ . La ligne horaire positionnée par l'angle θ n'est donc pas autre chose que la ligne de midi.

DEMONSTRATION. Prenons l'expression (41) et substituons-la dans (40), puis utilisons les relations simples de (37). Ce calcul élémentaire conduit à (49) qui est l'angle que la ligne de midi fait avec (Mz) au signe près.

$$\tan \theta = -\tan \alpha_0 = -\frac{k_1}{g_2} \quad (49)$$

La différence de signe vient du fait que le sens pris pour l'angle horaire t n'est pas le même que celui pris dans le plan du cadran et donc pour α ou θ . La relation (42) s'écrit alors $\alpha = -(t - \alpha_0) + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et la mesure principale $-(t - \alpha_0)$ représente l'angle entre la ligne de midi et la ligne horaire L_t (et non plus l'angle avec la verticale (Mz)). ■

8. ASPECTS DE QUELQUES CADRANS SOLAIRES BIFILAIRES GENERALISES

8.1 Cas de bifilaires à lignes horaires homogènes

Exemple n°1 : $b < a$.

$$\varphi = 51^\circ \text{N.}$$

$$D = +30^\circ$$

$$\frac{b}{a} \approx 0,55 \quad (j_1; j_2) \approx (-68^\circ; 22^\circ)$$

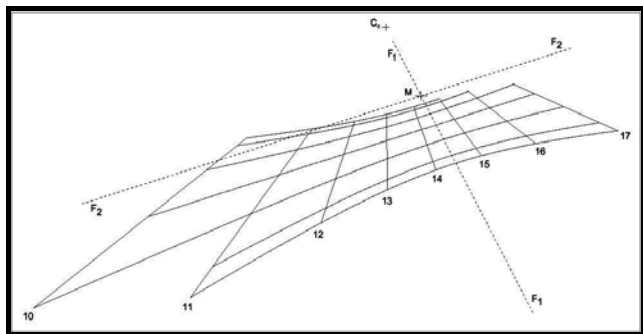


Fig. 13 : Cas où $b < a$ – Orthobifilaire équiangulaire déclinant

Les fils sont orthogonaux : F_1 est au-dessus de la sous-stylerie (C_eM) et F_2 est parallèle à l'équinoxiale.

Dans cette configuration que l'on peut appeler "orthobifilaire", le fil sous-stylerie (F_1) est toujours placé en-dessous du deuxième fil.

Exemple n°2 : $b > a$.

$$\varphi = 51^\circ N.$$

$$D = +15^\circ$$

$$\frac{b}{a} \approx 1,5 \quad (j_1 ; j_2) \approx (31^\circ ; 90^\circ)$$

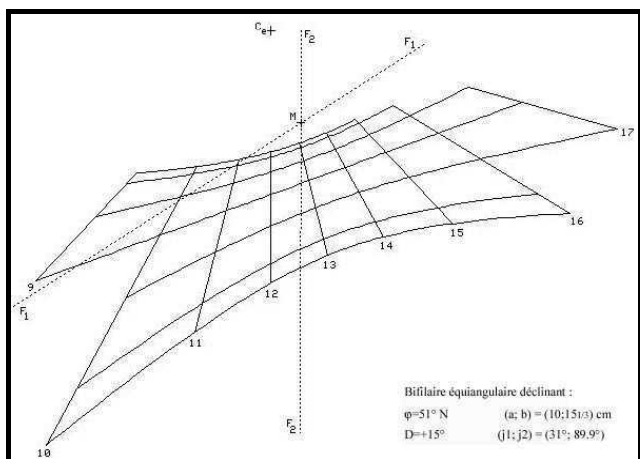


Fig. 14 : Cas où $b > a$ – bifilaire équiangulaire déclinant.

Il s'agit d'un bifilaire équiangulaire avec un fil quasi-vertical. La figure générale du cadran est plus grande que dans le cas où $b < a$.

Les arcs solsticiaux sont nettement plus écartés, la ligne d'horizon est inclinée.

Remarque : dès que l'un des fils est vertical, la ligne de midi est verticale !

Exemple n°3 : $b > a$.

$$\varphi = 51^\circ N.$$

$$D = +15^\circ$$

$$\frac{b}{a} \approx 1,4 \quad (j_1 ; j_2) \approx (16.5^\circ ; 60^\circ)$$

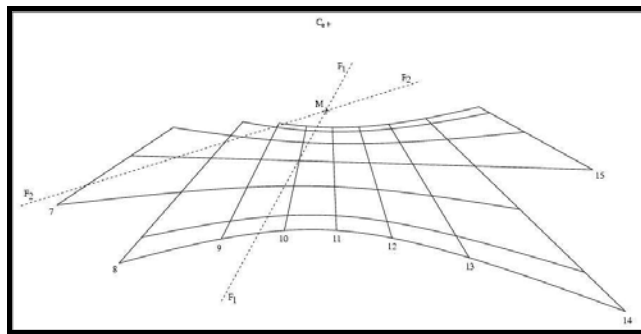


Fig. 15 : Cas où $b > a$ – Bifilaire équiangulaire déclinant.

Ici, le système des deux fils est choisi de telle sorte que F_1 soit en dessous de F_2 . La ligne d'horizon est horizontale, la sous-stylerie (C_eM) quasi-verticale et la ligne de midi est inclinée, et les lignes horaires sont espacées de 15° ! Ainsi le cadran est réglable en ajustant soit l'heure, soit l'horizontalité de la ligne d'horizon, les fils étant fixés indépendamment du cadran.

En général, cette "solution" de cadran équiangulaire devient problématique pour de grande valeur de la déclinaison gnomonique (voisinage de $\pm 90^\circ$). La distance entre les arcs solsticiaux devient si petite qu'aucune figure n'est exploitable.

8.2 Quelques cas particuliers

Exemple n°4 : $b = 2a$. (Fig. 17)

$$\varphi = 51^\circ N.$$

$$D = -15^\circ$$

$$\frac{b}{a} = 2 \quad (j_1 ; j_2) \approx (70^\circ ; -30^\circ)$$

Le rapport b/a et la configuration angulaire ont été choisies de telle sorte que la figure globale du cadran soit "éclaté". Les arcs diurnes sont relativement déformés par rapport à ce que les cadrans verticaux classiques nous enseignent.

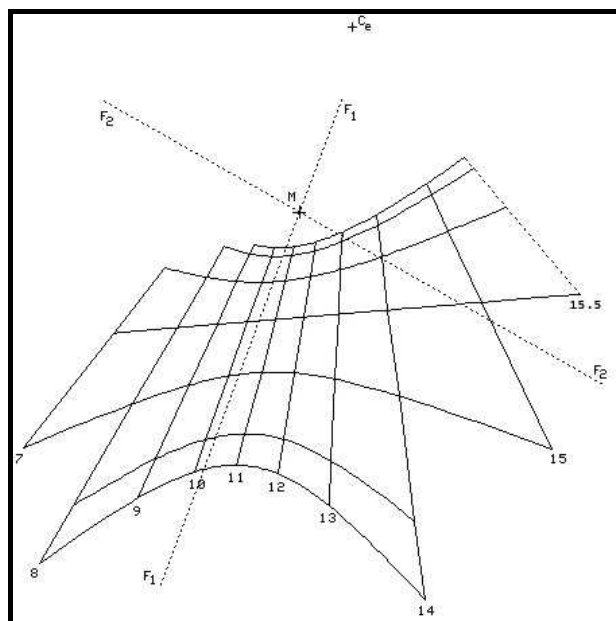


Fig. 17 : Cas où $b > a$ – bifilaire généralisé déclinant.

Exemple n°5 : $b=0.5 a$.

$\varphi = 51^\circ\text{N}$.

$D = -15^\circ$

$$\frac{b}{a} = 0,5 \quad (j_1 ; j_2) \approx (65^\circ; 30^\circ)$$

Dans cette configuration toutes les lignes remarquables du cadran solaire sont inclinées : la ligne d'horizon, la ligne de midi et l'équinoxiale.

La position angulaire des fils a été choisie de telle sorte que la ligne d'horizon soit fortement inclinée si bien que le point d'ombre peut se trouver au-dessus de l'horizon local !

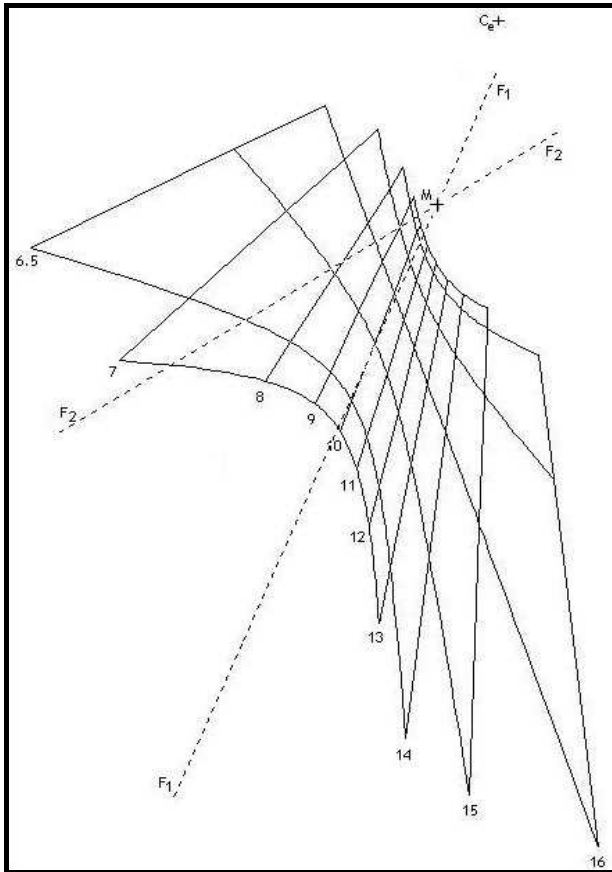


Fig. 16 : Cas où $b < a$ – bifilaire généralisé déclinant.

Exemple n°6 : $b > a$.

$\varphi = 51^\circ\text{N}$.

$D = -35^\circ$

$$\frac{b}{a} \approx 2,67 \quad (j_1 ; j_2) \approx (37.8^\circ; 0^\circ)$$

La position des fils a été choisie de telle sorte que l'équinoxiale soit verticale.

Un des fils est horizontal, par conséquent la ligne d'horizon du cadran est une horizontale qui passe l'origine M du repère.

Le centre C_e du cadran est rejeté très loin de M , le centre du repère des coordonnées.

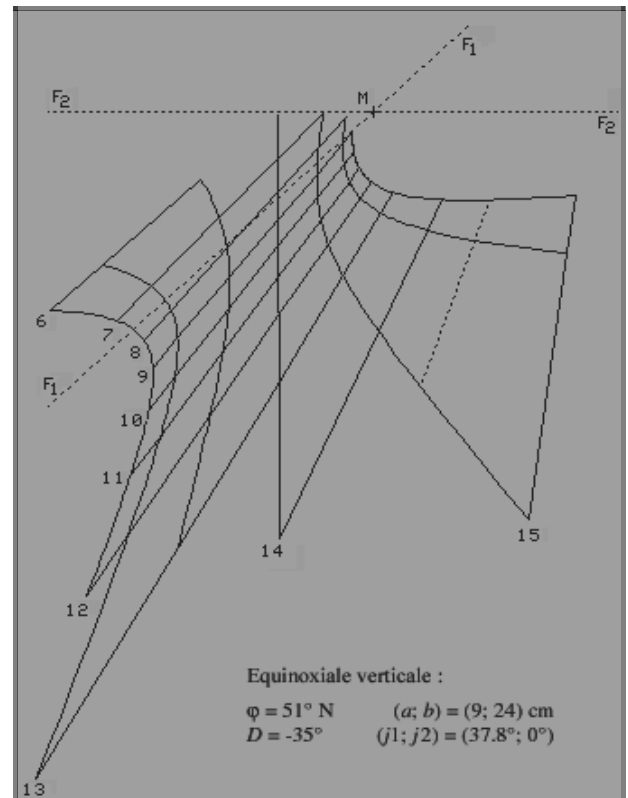


Fig. 18 : Cas où $b > a$ – bifilaire généralisé déclinant à équinoxiale verticale.

8.3 Photographies

M. P.J. Dallet, membre de la Commission des Cadran Solaires de la SAF, a construit un ensemble de cadrans bifilaires déclinants comprenant un orthobifilaire (fig. 19) et un unifilaire particulièrement original appelé « Cadran volcan » (fig. 20). Cet ensemble est dénommé « la danseuse au châle ».

Le tracé des lignes a été effectué avec le logiciel « Solarium » dont M. Dallet est le développeur. Ce logiciel a subi une importante mise à jour par l'intégration des expressions des coordonnées du point d'ombre fourni par deux gnomons rectilignes en position quelconque dans des plans parallèles au plan du cadran (voir équation (10)) Cette nouvelle version donne des résultats particulièrement complets étendant considérablement ce qui est étudié dans cet article. Je citerai sans exhaustivité la possibilité de tracer :

- des lignes horaires (d'heure vraie, de temps moyen, d'heures sidérales, Babyloniennes et Italiennes, Temporaire, Bibliques, heures de l'ISHA et du SUBH...)
- des lignes de déclinaison (arcs diurnes, ascension droite, durée du jour...)
- Les almicantarats et les azimuts
- Puis diverses lignes (courbes de temps moyen, heures des prières islamiques notamment...)

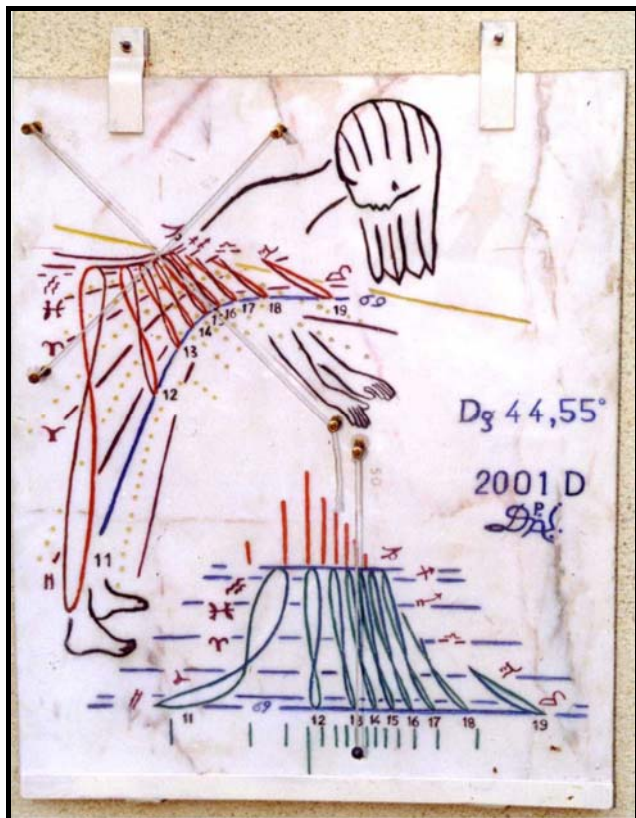


Fig 19 : Cadran solaire bifilaire : « la danseuse au châle ».

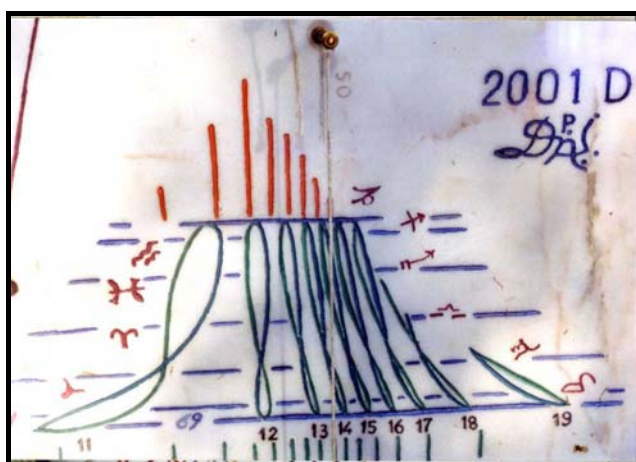


Fig 20 : Détail du cadran solaire unifilaire appelé « cadran volcan » - La courbe de temps moyen est tracée pour chaque heure pleine.

Le cadran « volcan » est la correction du cadran unifilaire décrit dans l'article "Théorie sur le cadran solaire bifilaire vertical déclinant" (Collin, 2000, §4.1.4). En effet, pour que la description soit valable, il fallait tenir compte de la variation de l'azimut avec la déclinaison du soleil (c'est ce que permettent les lignes de dates horizontales dans la figure 20). Les azimuts sont bien entendu verticaux et les lignes horaires des portions de courbes (et non des droites parallèles comme cela a été écrit...). Il est donc nécessaire de connaître δ pour interpoler la lecture de l'heure.

9. CONCLUSION

Le "bifilaire généralisé" semble compléter la théorie du bifilaire de Michnik. Croire qu'il achève serait bien présomptueux et illusoire puisque le domaine de la "gnomonique bifilaire" est immense pour ne pas dire

infini. D'ailleurs, on s'est volontairement limité aux réseaux des lignes horaires et des arcs diurnes et surtout au cas des plans verticaux déclinants : c'est peu dire de toutes les possibilités qui résistent encore à tout traitement détaillé et qui ne serait qu'exhaustif : un ouvrage y suffirait à peine.

Dans ce présent exposé, le gnomoniste y puisera quelques possibilités qui s'offrent désormais à lui et dans lequel il pourra exprimer tous ses talents d'artiste sans avoir à supporter les difficultés mathématiques désormais grandissantes dans ce nouveau domaine gnomonique. (voir par exemple (Ferrari, 2000)).

L'univers récent que constitue la "gnomonique bifilaire" est en pleine expansion pour le plus grand plaisir des amateurs et des professionnels de la gnomonique.

10. BIBLIOGRAPHIE

[Collin, D.] "Théorie sur le cadran solaire bifilaire vertical déclinant", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* (JRASC), Vol.94, n°3 (683), juin 2000, pp.95-111.

[Hacar, M.A.] "Relojes de Sol Bifilares", *Analema*, n°2, mai-août 1991, pp.16-19.

[Ferrari G.] "A curious property of bifilar sundials", *The Compendium* (Journal of the North American Sundial Society), Vol.7, n°4, décembre 2000, pp.11-16.

[Fresnel, J.] *Méthodes modernes en géométrie*, Hermann - Editeur des Sciences et Arts, 1997.

[Michnik, H.] "Theorie einer Bifilar-Sonnenuhr", *Astronomische Nachrichten*, Vol.217, N°5190, April 1923, pp.81-90.

[Savoie, D.] *La gnomonique*, Edition "Les Belles Lettres", octobre 2001.

[Sawyer III, F.W.] "Bifilar gnomonic", *Journal of the British Astronomical Association* (JBAA), Vol.88, n°4 (683), 1978, pp.334-351.

ANNEXE 1 : ÉQUATION CARTESIENNE DES LIGNES HORAIRES

On se propose de montrer ici comment on établit l'équation générale des lignes horaires dans le repère Myz . Un changement de notation s'impose vu l'aspect des coordonnées y et z du point d'ombre P . Partant des équations (10) on pose :

$$\begin{cases} P = g_1 (\cos D \sin t - \sin D \sin \varphi \cos t) + k_1 \cos \varphi \cos t \\ Q = g_1 \sin D \cos \varphi + k_1 \sin \varphi \\ R = g_2 \cos \varphi \cos t + k_2 (\cos D \sin t - \sin D \sin \varphi \cos t) \\ S = g_2 \sin \varphi + k_2 \sin D \cos \varphi \\ T = \cos D \sin \varphi \cos t + \sin D \sin t \\ U = \cos D \cos \varphi \end{cases} \quad (50)$$

Pour écrire en fait :

$$\begin{cases} y = \frac{P + Q \tan \delta}{T - U \tan \delta} \\ z = \frac{R + S \tan \delta}{T - U \tan \delta} \end{cases} \quad (51)$$

Tout d'abord, isolons $\tan \delta$ des équations (51).

$$\tan \delta = \frac{yT - P}{yU + Q} \quad \text{et} \quad \tan \delta = \frac{zT - R}{zU + S}$$

L'égalité entre les deux expressions de $\tan \delta$ permet d'obtenir directement l'équation cartésienne des lignes horaires. En effet, on a d'abord :

$$(yT - P)(zU + S) = (zT - R)(yU + Q) \quad (52)$$

Puis après développement et regroupement :

$$y(RU + ST) - z(PU + QT) + (QR - PS) = 0 \quad (53)$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les cosinus directeurs de l'équation cartésienne (53) à partir des notations initiales en utilisant les relations de (50) :

$$\begin{aligned} RU + ST &= g_2 (\cos D \cos t + \sin D \sin \varphi \sin t) + k_2 (\cos \varphi \sin t) \\ PU + QT &= k_1 (\cos D \cos t + \sin D \sin \varphi \sin t) + g_1 \cos \varphi \sin t \\ QR - PS &= (g_1 g_2 - k_1 k_2) (\sin D \cos t - \cos D \sin \varphi \sin t) \end{aligned} \quad (54)$$

La réduction de $g_1 g_2 - k_1 k_2$ à l'aide des définitions g_1, g_2, k_1 et k_2 données en (8) conduit à (55) :

$$g_1 g_2 - k_1 k_2 = -ab \quad (55)$$

La substitution des relations (54) et (55) dans (53) donne directement (56) qui est l'équation cartésienne générale des lignes horaires dans Myz d'un cadran solaire bifilaire généralisé :

$$\begin{aligned} &y [g_2 \cos D \cos t + (g_2 \sin D \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \sin t] \\ &- z [k_1 \cos D \cos t + (g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi) \sin t] \\ &- ab (\sin D \cos t - \cos D \sin \varphi \sin t) = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

ANNEXE 2 : ÉQUATION GÉNÉRALE DES ARCS-DIURNES

Pour établir l'équation générale des arcs-diurnes il est nécessaire de partir des coordonnées générales (10) du point d'ombre P et que l'on ordonne suivant $\cos t$ et $\sin t$. Il s'agit du groupe de coordonnées (57).

$$\begin{cases} y = \frac{g_1 \cos D \sin t + (k_1 \cos \varphi - g_1 \sin D \sin \varphi) \cos t + \tan \delta (g_1 \sin D \cos \varphi + k_1 \sin \varphi)}{\cos D \sin \varphi \cos t + \sin D \sin t - \cos D \cos \varphi \tan \delta} \\ z = \frac{k_2 \cos D \sin t + (g_2 \cos \varphi - k_2 \sin D \sin \varphi) \cos t + \tan \delta (g_2 \sin \varphi + k_2 \sin D \cos \varphi)}{\cos D \sin \varphi \cos t + \sin D \sin t - \cos D \cos \varphi \tan \delta} \end{cases} \quad (57)$$

a. Préliminaires.

Pour simplifier les manipulations algébriques on posera :

$$\begin{cases} a_1 = g_1 \cos D \\ b_1 = k_1 \cos \varphi - g_1 \sin D \sin \varphi \\ c_1 = \tan \delta (g_1 \sin D \cos \varphi + k_1 \sin \varphi) \\ a_2 = k_2 \cos D \\ b_2 = g_2 \cos \varphi - k_2 \sin D \sin \varphi \\ c_2 = \tan \delta (g_2 \sin \varphi + k_2 \sin D \cos \varphi) \\ a_3 = \sin D \\ b_3 = \cos D \sin \varphi \\ c_3 = \tan \delta (\cos D \cos \varphi) \end{cases} \quad (58)$$

Remarquons que a_i est lié à $\sin t$, b_i est lié à $\cos t$ et c_i à $\tan \delta$. De cette façon (57) devient (59) :

$$\begin{cases} y = \frac{a_1 \sin t + b_1 \cos t + c_1}{a_3 \sin t + b_3 \cos t - c_3} \\ z = \frac{a_2 \sin t + b_2 \cos t + c_2}{a_3 \sin t + b_3 \cos t - c_3} \end{cases} \quad (59)$$

b. Pour déterminer l'équation générale des arcs diurnes il faut éliminer t des équations (59). Pour cela, on exprimera $\cos t$ et $\sin t$ indépendamment l'un de l'autre, puis on formera la relation fondamentale $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, ce qui conduira ensuite à une forme quadratique en y et z indépendante de t . D'où les étapes (i) et (ii) suivantes :

i. Expression de $\cos t$.

A partir de (59) et de y , isolons $\cos t$.

$$\cos t = \frac{(a_1 - a_3 y) \sin t + c_1 + c_3 y}{y b_3 - b_1} \quad (60)$$

Puis à partir de z , isolons $\sin t$.

$$\sin t = \frac{(b_2 - b_3 z) \cos t + c_2 + c_3 z}{a_3 z - a_2} \quad (61)$$

La substitution de (61) dans (60) donne $\cos t$:

$$\cos t = \frac{-y(a_2 c_3 + a_3 c_2) + z(a_1 c_3 + a_3 c_1) + a_1 c_2 - a_2 c_1}{y(a_3 b_2 - a_2 b_3) + z(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad (62)$$

ii. Expression de $\sin t$.

La substitution de (60) dans (61) donne directement $\sin t$:

$$\sin t = \frac{y(b_2 c_3 + b_3 c_2) - z(b_1 c_3 + b_3 c_1) - b_1 c_2 + b_2 c_1}{y(a_3 b_2 - a_2 b_3) + z(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad (63)$$

c. L'équation de la quadrique s'obtiendra en faisant simplement $(62)^2 + (63)^2 = 1$. Par conséquent, après réduction au même dénominateur suivi d'une simplification, on obtient (64) :

$$\begin{aligned}
& [-y(a_2c_3 + a_3c_2) + z(a_1c_3 + a_3c_1) + (a_1c_2 - a_2c_1)]^2 \\
& + [y(b_2c_3 + b_3c_2) - z(b_1c_3 + b_3c_1) + (b_2c_1 - b_1c_2)]^2 \quad (64) \\
& = [y(a_3b_2 - a_2b_3) + z(a_1b_3 - a_3b_1) + (a_2b_1 - a_1b_2)]^2
\end{aligned}$$

d. Si l'on s'impose de nouveau un changement de notation on posera :

$$\begin{cases}
A_1 = a_2c_3 + a_3c_2 \\
B_1 = a_1c_3 + a_3c_1 \\
C_1 = a_1c_2 - a_2c_1 \\
A_2 = b_2c_3 + b_3c_2 \\
B_2 = b_1c_3 + b_3c_1 \\
C_2 = b_2c_1 - b_1c_2 \\
A_3 = a_3b_2 - a_2b_3 \\
B_3 = a_1b_3 - a_3b_1 \\
C_3 = a_2b_1 - a_1b_2
\end{cases} \quad (65)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (64) plus simplement :

$$[-A_1y + B_1z + C_1]^2 + [A_2y - B_2z + C_2]^2 = [A_3y + B_3z + C_3]^2 \quad (66)$$

Le développement des carrés puis le regroupement des termes du premier et du second degré et des constantes donnera (67) :

$$\begin{aligned}
& [A_1^2 + A_2^2 - A_3^2]y^2 + [B_1^2 + B_2^2 - B_3^2]z^2 \\
& + 2[-A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3]yz \\
& + 2[-A_1C_1 + A_2C_2 - A_3C_3]y \\
& + 2[B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3]z \\
& + [C_1^2 + C_2^2 - C_3^2] = 0 \quad (67)
\end{aligned}$$

Si l'on pose finalement :

$$\begin{cases}
A = A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \\
B = B_1^2 + B_2^2 - B_3^2 \\
C = -(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\
E = -A_1C_1 + A_2C_2 - A_3C_3 \\
F = B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 \\
G = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2
\end{cases} \quad (68)$$

Alors (67) devient (69) qui est l'équation générale des sections coniques décrite par le point d'ombre au cours d'une journée, tout le long de l'année.

$$\begin{aligned}
f(y; z) &= Ay^2 + Bz^2 + 2Cyz + 2Ey + 2Fz + G \\
\text{avec } f(y; z) &= 0 \quad (69)
\end{aligned}$$

e. Exprimons maintenant les coefficients A, B, C, E, F, G en fonction des paramètres bifilaires ($a; b; j_1; j_2$) et des paramètres physiques du cadran ($D; \varphi$).

i. Préliminaires.

Les coefficients intermédiaires A_i, B_i, C_i se calculent en utilisant les relations (58) que l'on substitue successivement dans les relations (65). On obtient le jeu de relations (70), (71) et (72) :

$$\begin{cases}
A_1 = (k_2 \cos \varphi + g_2 \sin D \sin \varphi) \tan \delta \\
A_2 = g_2 \cos D \tan \delta \\
A_3 = g_2 \sin D \cos \varphi - k_2 \sin \varphi
\end{cases} \quad (70)$$

TABLE IX Coefficients du polynôme du second degré

Coefficients	en variable réduite	en fonction des paramètres du bifilaire
A	$A_1^2 + A_2^2 - A_3^2$	$\frac{\sin^2 \delta (g_2^2 + k_2^2) - (g_2 \sin D \cos \varphi - k_2 \sin \varphi)^2}{\cos^2 \delta}$
B	$B_1^2 + B_2^2 - B_3^2$	$\frac{\sin^2 \delta (g_1^2 + k_1^2) - (g_1 \sin \varphi - k_1 \sin D \cos \varphi)^2}{\cos^2 \delta}$
C	$-(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$	$-\frac{\sin^2 \delta (g_1k_2 + g_2k_1) + (g_2 \sin D \cos \varphi - k_2 \sin \varphi)(g_1 \sin \varphi - k_1 \sin D \cos \varphi)}{\cos^2 \delta}$
E	$-A_1C_1 + A_2C_2 - A_3C_3$	$\frac{ab \cos D \cos \varphi}{\cos^2 \delta} (k_2 \sin \varphi - g_2 \sin D \cos \varphi)$
F	$B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3$	$\frac{ab \cos D \cos \varphi}{\cos^2 \delta} (k_1 \sin D \cos \varphi - g_1 \sin \varphi)$
G	$C_1^2 + C_2^2 - C_3^2$	$\frac{a^2b^2}{\cos^2 \delta} (\sin^2 \delta - \cos^2 D \cos^2 \varphi)$

$$\begin{cases} B_1 = (g_1 \cos \varphi + k_1 \sin D \sin \varphi) \tan \delta \\ B_2 = k_1 \cos D \tan \delta \\ B_3 = g_1 \sin \varphi - k_1 \sin D \cos \varphi \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{cases} C_1 = -ab \cos D \sin \varphi \tan \delta \\ C_2 = -ab \sin D \tan \delta \\ C_3 = ab \cos D \cos \varphi \end{cases} \quad (72)$$

ii. Forme définitive des coefficients du polynôme $f(y; z)$.

On présente en table IX les résultats des calculs conduisant à l'expression des six coefficients du polynôme du second degré.

Une simplification par $\cos^2 \delta$ appliquée à tous les coefficients permet d'écrire les expressions les plus réduites des coefficients de la quadrique générale des arcs-diurnes : c'est le groupe de relation (73).

$$\begin{cases} A = (g_2^2 + k_2^2) \sin^2 \delta - (g_2 \sin D \cos \varphi - k_2 \sin \varphi)^2 \\ B = (g_1^2 + k_1^2) \sin^2 \delta - (g_1 \sin \varphi - k_1 \sin D \cos \varphi)^2 \\ C = -(g_1 k_2 + g_2 k_1) \sin^2 \delta \\ \quad - (g_2 \sin D \cos \varphi - k_2 \sin \varphi)(g_1 \sin \varphi - k_1 \sin D \cos \varphi) \\ E = ab \cos D \cos \varphi (k_2 \sin \varphi - g_2 \sin D \cos \varphi) \\ F = ab \cos D \cos \varphi (k_1 \sin D \cos \varphi - g_1 \sin \varphi) \\ G = a^2 b^2 (\sin^2 \delta - \cos^2 D \cos^2 \varphi) \end{cases} \quad (73)$$

L'étude de ces six coefficients donnera accès à la nature des sections coniques décrites par le point d'ombre P dans un cadran solaire vertical déclinant à système bifilaire généralisé.

D. COLLIN
Calais, Novembre 2002